Hans Michael Stiebing

Dreistelligkeit der Relationenlogik

Kommentierende Bemerkungen zu Peirces „The Logic of Relatives“ [1]

Im Rahmen der Darstellung seiner existentiellen Graphen [2] scheint *Peirce* die Rückführung beliebigstelliger Prädikate auf dreistellige durchzuführen [3], wobei er jedoch meines Erachtens nach nur eine Richtung des dazu notwendigen Beweises vollständig erbringt. Er zeigt nämlich nur, daß aus dreistelligen Prädikaten Prädikate beliebiger „Adinität“ generierbar sind; er sagt aber nicht, daß jedes beliebigstellige Prädikat auf dreistellige rückführbar sei.

Zuerst wird gezeigt, daß sich mittels Kaskaden von Triaden jedes Prädikat beliebig vorgegebener höherer Stelligkeit generieren läßt:

(3) $= x -$

(4) $= x - y =$

(5) $= x - y - z =$ usw. [4]

Es besteht jedoch nicht nur die Möglichkeit kaskadenartiger Verknüpfung von Prädikaten, vielmehr können zwei beliebigstellige Prädikate zu einem neuen verknüpft werden, indem paarweise freie Verbindungen zusammengenommen werden. Ein so aus einer m-Ade und einer n-Ade entstandenes Prädikat ist dann (m+n-2k)-adig, wobei k die Zahl der vorgenommenen Zusammenfassungen ist.

Nach der Definition von Artiade [5] (= Prädikat mit gerader Anzahl von offenen Plätzen) und Perisside [6] (= Prädikat mit ungerader Anzahl von offenen Plätzen) wird gezeigt, daß Artiadenvereinigung immer wieder zu Artiaden führt, der Gebrauch von Perissiden hingegen Polyaden beliebig vorgebener Stelligkeit erzeugen kann.

Vor allem zeigt *Peirce* noch, daß auch Prädikate mit weniger als drei Valenzen aus Triaden hergestellt werden können:

(3) $= x -$

(2) $- x = y -$

(1) $\bigcirc\, x -$ [7]

(0) $x \equiv y$

Da zur Generierung beliebiger Polyaden Artiaden allein nicht ausreichend sind, sondern auch Perisside benötigt werden, „it will be the best, then, to use single letters for relatives of some one definite and odd number of blanks. We naturally choose three as the smallest number which will answer the purpose.“ [8] Bis hier hat *Peirce* gezeigt, daß jede Polyade mit beliebiger, vorgegebener Zahl von Valenzen aus Triaden erzeugt werden kann. Damit ist eine Richtung des Beweises vollständig erbracht. Es fehlt nun noch die Darstellung jedes beliebigen, vorgegebenen Prädikats mittels dreistelliger Prädikate [9].

Peirce zeigt diese Umsetzung noch für Dyaden und Monaden, hat jedoch in der schriftlichen Formulierung anscheinend eine Definition vergessen, was durch die doppelte Benutzung des Buchstabens „w“ zu erklären ist [10].

Peirce selbst gibt nur die hier folgenden Umsetzungen 2 und 3 an, die Notwendigkeit der Umsetzung 1 zeigt sich jedoch in seinen Beispielen [11].

1) Jedes einstellige Prädikat $x\overset{A}{—}$ kann ersetzt werden durch ein dreistelliges Prädikat $\underset{|C}{\underline{\;B\;}\,x\,,\underline{\;A\;}}$. [12]

   (gelesen: A ist coexistent mit B und C und x [A])

2) Jedes zweistellige Prädikat $\underline{\;A\;}\,x\,\underline{\;B\;}$ kann ersetzt werden durch ein dreistelliges Prädikat $\underset{|C}{\underline{\;A\;}\,x\,\text{"}\,\underline{\;B\;}}$

   (gelesen: A ist coexistent mit C und x [A, B])

Da die Transformationen 1 und 2 neue offene Verbindungen enstehen lassen, wird das „abschließende“ Prädikat „w“ eingeführt:

3) $\underset{|C}{\underline{\;B\;}\,w\,\underline{\;A\;}}$ (gelesen: A ist coexistent mit B und C)

(In Beispielen tritt dieses Prädikat dann nur in der Form Cw – auf.)
Die mit ein- und zweistelligen Relationen geschriebenen Graphen werden nun als Abkürzungen von vollständigen (nur mit dreistelligen Relationen geschriebenen) Graphen bestimmt: “. . . having once recognised that such a mode of writing is possible, we can continue to use our former methods, provided we now consider them as abbreviations.“ [13]

Man muß sich stets vor Augen halten, daß für *Peirce* die Gültigkeit aller solcher logischen Untersuchungen erst in ihrer Anwendung begründet liegen kann: “The logical doctrine of this section, must, we may remark, find its application in metaphysics, if we are to accept the Kantian principle that metaphysical conceptions mirror those of formal logic.“ [14]

In der neueren Informatik-Literatur [15] gibt es eine auffallende Parallele zu den *Peirceschen* Überlegungen:

Es handelt sich hierbei um die Begriffsbildungen
a) des S-rudimentären Prädikats [16] und
b) des existentiell definierbaren Prädikats [17].

zu a) The class of S-rudimentary predicates is defined as follows:
   (i) The ternary predicate $xy=z$ is S-rudimentary [18].
   (ii) Any explicit transformation of a S-rudimentary predicate is S-rudimentary [19].

(iii) If $R(\vec{x}_n)$ and $S(\vec{x}_n)$ are S-rudimentary, then so are $\neg R(\vec{x}_n)$, $R(\vec{x}_n) \wedge S(\vec{x}_n)$ and $R(\vec{x}_n) \vee S(\vec{x}_n)$. [20]

(iv) If $R(\vec{x}_n, y)$ is S-rudimentary, then so are $\exists z(zPy \wedge R(\vec{x}_n, y))$ and $\forall z(zPy \Rightarrow R(\vec{x}_n, y))$. [21]

(v) No predicate is S-rudimentary unless it can be shown to be so by rules (i) through (iv).

zu b) A predicate $R(\vec{x}_n)$ is existentially definable if and only if there is a S-rudimentary predicate
$Q(\vec{x}_n, y)$, such that for all $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A^*$
$R(\vec{x}_n) \Leftrightarrow \exists y(Q(\vec{x}_n, y))$. [22]

Jones zeigt, daß die Klasse der existentiell definierbaren Prädikate äquivalent ist mit der Klasse der durch eine Turingmaschine berechenbaren. Diese wiederum ist äquivalent mit der Klasse der durch eine *Chomsky*-Typ-o-Grammatik generierbaren Sätze [23]. Die meiner Meinung nach richtige Annahme, daß alle natürlichen Sprachen mit einer *Chomsky*-Typ-o-Grammatik beschreibbar sind [24], gibt dann den Beweis in der von *Peirce* nicht vollständig gezeigten Richtung:

Satz: Jedes beliebigstellige Prädikat ist darstellbar als Existenzquantifikation über einem S-rudimentären, d. h. letztlich dreistellig komponierten Prädikat!

Beweis:
(i) Jede natürliche Sprache ist *Chomsky*-Typ-o-darstellbar.
(ii) Typ-o-Darstellbarkeit ist äquivalent zur Darstellbarkeit mittels existentiell definierbaren Prädikaten.
(iii) Aus (i) und (ii) folgt: Jedes in einer natürlichen Sprache formulierte beliebigstellige Prädikat ist darstellbar als existentiell definierbares Prädikat.
(iv) Aus der Definition des existentiell definierbaren Prädikats folgt dann unser Satz.

Bis hierher wurde von *Peirce* nur die Darstellbarkeit von Aussagen mit Hilfe eines relationslogischen Apparates gezeigt, jedoch noch nicht auf Wahrheit oder Falschheit von Aussagen eingegangen. Diesen Teil der Untersuchungen führt *Peirce* in den weiteren Paragraphen aus.[25]

Den bisherigen Teil des Vorgehens nennt er „paradiesische Logik vor dem Sündenfall, die noch nicht vom Baum der Erkenntnis genascht hat."

"Yet plainly without a knowledge of falsehood no development of discursive reason can take place." [26]

"But there no possible avenue appears by which the knowledge of falsehood could be brought into this Garden of Eden except by the arbitrary and inexplicable introduction of the Serpent in guise of a proposition necessarily false.“ [27] Zur Herstellung solcher „notwendig falschen“ Aussagen wird das dreistellige Prädikat „ – ist weder – noch – “ (in Zeichen $-\!\!<$) eingeführt.

Trotz auffallender Ähnlichkeit dieser Prädikatdefinition mit der Definition der „Negatkonjunktion“ in der formalen Logik [28] muß darauf hingewiesen werden, daß es sich um zwei streng zu trennende Sachverhalte handelt:

Peirce führt das dreistellige Prädikat „ $-\!\!<$ “ als notwendig zur Herstellung falscher Aussagen ein, wohingegen „ $\downarrow$ “ ein logischer Junktor zur Verknüpfung von wahren oder falschen Aussagen ist. [29]

Natürlich aber wählt *Peirce* dieses Prädikat, um mittels der üblichen Umsetzungen dann entsprechende Prädikatsverknüpfungen beliebiger Komplexität als wahre oder falsche Aussagen einführen zu können.

"These explanations need not be carried further to show that we have here a perfectly defficient and highly analytical method of representing relations.“ [30]

Anmerkungen:

1. Ch. S. Peirce: *The Logic of Relatives.* in Peirce: *Collected Papers;* Harvard ^{4}1974, Volume III. (CP 3.456ff) (Der hier vorgelegte Aufsatz bezieht sich auf CP 3.483–491)
2. s. Don D. Roberts: *The Existential Graphs of Ch. S. Peirce;* Den Haag, Paris 1973
3. CP 3.483–487
4. CP 3.483
5. ἀριθμὸς ἄρτιος = gerade Zahl
6. ἀριθμὸς περισσός = ungerade Zahl
7. CP 3.484
8. CP 3.485
9. Die Trennung der beiden Beweisrichtungen ist notwendig, da es sich im zweiten Teil nicht nur um formale, sondern auch um inhaltliche Problematik handelt.
10. CP 3.486
11. CP 3.486ff
12. Gemäß der von Peirce angegebenen Umsetzung der Graphen in die Umgangssprache (vgl. CP 3.479) gebe ich diese Definitionen mit den Variablen für die den Verbindungen zuzuordnenden Hecceitäten.
13. CP 3.486
14. CP 3.487
15. N. D. Jones: *Computabality Theory;* New York, London 1973
16. Jones 69
17. Jones 84
18. x, y und z sind Wörter über einem beliebigen Alphabet; xy bezeichnet die Hintereinanderschreibung (Katenation).
19. $P(\vec{x}_n)$ is an explicit transformation of $Q(\vec{y}_m)$ if there are $z_1, z_2, \dots, z_m$, each of which is either an element of U (= universe) or one of the variable names

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, such that for all values $x_1, x_2, \ldots, x_n \in U$, $P(\vec{x}_n)$ is true if and only if $Q(\vec{z}_m)$ is true. (Jones 15)

20. $\vec{x}_n =_{def} x_1, x_2, \ldots, x_n$

21. $zPy =_{def} \exists u, v \in A^*(y = uzv)$. ("z ist Teilwort von y")

22. $A =_{def}$ freies Monoid über einem Alphabet A

23. Nach der Church'schen These sind alle Definitionen von Berechenbarkeit äquivalent. (s. H. Hermes: *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit;* Berlin, Heidelberg, New York [2]1971 oder J. E. Hopcroft, J. D. Ullmann: *Formal Languages and their Relation to Automata;* Reading, Menlo Park, London, Don Mills 1969)
24. vgl. verschiedene Arbeiten von R. Montague in Montague: *Formal Philosophy;* New Haven, London 1974
25. CP 3.488–491
26. CP 3.488
27. CP 3.489
28. s. P. Lorenzen: *Formale Logik;* Berlin [4]1970. In weiterer Literatur findet sich neben „Negatkonjunktion" auch noch „Rejektion", „doppelter Sheffer'scher Strich" und „Nicod'sche Funktion". Wahrheitstafel des Junktors „↓":

„weder p noch q"

p	q	p ↓ q
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Mittels „↓" lassen sich alle anderen Junktoren definieren:

$$\neg p =_{def} p \downarrow p$$

$$p \vee p =_{def} (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

Die weiteren Definitionen ergeben sich aus der Rückführbarkeit auf $\neg$ und v.
29. Peirce selbst führt diesen Junktor mit dem Zeichen „ ⅄ " ein und nennt ihn „ampheck" (ἀμφηκής = cutting both ways) (vgl. CP 4.264)

30. CP 3.491

Résumé

Dans le cadre de sa description des graphes existentiels, Peirce montre que les relations triadiques suffisent pour construire les relations de toute adinité. En nous plaçant dans une perspective informatique théorique, nous avons essayé de montrer la proposition converse, à savoir que chaque relation d'adinité est réductible à des relations triadiques. La relation triadique „– est ni – ni –" suffira donc pour introduire les concepts de vérité et de fausseté. Mais il ne faut pas confondre cette relation triadique avec la fonction dyadique „ni – ni –".

Summary

Within his description of existential graphs *Peirce* shows that ternary relations are sufficient to construct relations of any adinity. From the point of view of theoretical computer science we have tried to show the converse: Each relation of any adinity can be reduced to ternary relations. The definition of the ternary relation "– is neither – nor –" will then be sufficient for an introduction of falsehood and truth. But this ternary relation must not be confused with the binary truth-function "neither – nor –".

SEMIOSIS 3

Inhalt