Wolfgang Berger

Zur Algebra der Zeichenklassen

M. Bense[1] hat folgendes Beispiel einer Verknüpfung[2] von Zeichenklassen angegeben: Wenn man ein Bild, dessen ästhetischer Zustand durch die 5. Zeichenklasse 3.1 2.2 1.3 charakterisiert ist, und einen Rahmen, dem die vollständige Realitätsthematik 2.1 2.2 2.3 und über die Dualisierung folglich die 7. Zeichenklasse 3.2 2.2 1.2 zugeordnet werden muß, zusammenbringt, dann gehört das „Bild mit Rahmen" zur 8. Zeichenklasse 3.2 2.2 1.3.

Man muß beachten, daß es sich hier nicht um die eigentlichen Zeichenoperationen der Adjunktion, Superisation oder Iteration handelt, sondern zunächst um die sehr schwach semiotisierte Operation der Verbindung oder Zusammenstellung von Zeichenobjekten[3], und hieraus erst ergibt sich als Konsequenz im Bereich der Zeichenklassen die oben angesprochene Verknüpfung. Diese Zeichenklassenoperation werde „Vereinigung" genannt und mit „$\sqcup$" bezeichnet[4]. Sie ist also in der Menge der zehn Zeichenklassen eine Verknüpfung, die durch die Verbindung von Zeichenobjekten induziert wird. Nach *M. Bense*[5] werden dann zwei beliebige Zeichenklassen ZK_1 und ZK_2 vereinigt nach der

Regel: In Mittel-, Objekt- und Interpretantenbezug der resultierenden Zeichenklasse tritt jeweils die höchste der beiden Trichotomien auf, die in den entsprechenden Bezügen von ZK_1 und ZK_2 vorkommen.

Entsprechend dieser Regel ist z.B.

$$(3.1\ 2.1\ 1.3) \sqcup (3.2\ 2.2\ 1.2) = (3.2\ 2.2\ 1.3),$$

d.h., die Vereinigung der 3. mit der 7. ergibt die 8. Zeichenklasse.

Unter Verwendung von Buchstaben i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3, k_1, k_2, k_3 für die numerischen Trichotomien in den Zeichenklassen (wobei die Indizes nur zur Unterscheidung dienen und hier keine semiotische Bedeutung haben) läßt sich *Benses* Regel formal so fassen:

> Wenn $3.i_1\ 2.j_1\ 1.k_1$ und $3.i_2\ 2.j_2\ 1.k_2$ die zu vereinigenden Zeichenklassen sind, so gilt für die resultierende Zeichenklasse $3.i_3\ 2.j_3\ 1.k_3$:
>
> $i_3 = \max(i_1,i_2)$, $j_3 = \max(j_1,j_2)$, $k_3 = \max(k_1,k_2)$.

In Form einer Gleichung lautet die Regel:

$$(3.i_1\ 2.j_1\ 1.k_1) \sqcup (3.i_2\ 2.j_2\ 1.k_2) = (\,3.\max(i_1,i_2)\ 2.\max(j_1,j_2)\ 1.\max(k_1,k_2)\,).$$

Man verifiziert leicht, daß die Vereinigung von Zeichenklassen assoziativ und kommutativ ist. Ferner ergibt sich für „$\sqcup$" folgende Verknüpfungstabelle, in der für die Zeichenklassen die von *E. Walther*[6] vorgenommene Numerierung verwendet wird:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		3	5	5	6	8	8	9	10
			4	5	6	7	8	9	10
				5	6	8	8	9	10
					6	9	9	9	10
						7	8	9	10
							8	9	10
								9	10
									10

Durch diese Tabelle ist die Struktur, die der Menge der zehn Zeichenklassen mittels der Vereinigung „$\sqcup$" aufgeprägt ist, algebraisch hinreichend deutlich beschrieben und kann mit ihr verknüpfungstechnisch beherrscht werden.

Der algebraische Zugang läßt sich nun durch einen ordnungstheoretischen ergänzen. Dazu wird folgende „kleiner"-Beziehung, bezeichnet mit „$\sqsubseteq$", zwischen Zeichenklassen eingeführt durch die

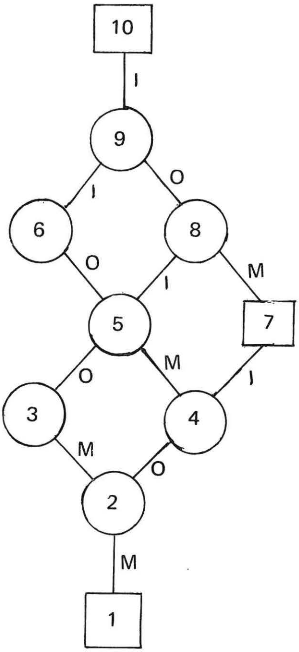
Definition: Zwischen zwei beliebigen Zeichenklassen besteht genau dann die Relation „$\sqsubseteq$", wenn in allen drei Bezügen die Trichotomie der ersten Zeichenklasse semiotisch nicht höher graduiert ist als die entsprechende Trichotomie der zweiten Zeichenklasse.

Hiernach gilt z.B. (3.1 2.1 1.3) $\sqsubseteq$ (3.2 2.3 1.3), d.h., die 3. Zeichenklasse ist „kleiner" als die 9. Man könnte also sagen, daß zwischen zwei Zeichenklassen ZK_1 und ZK_2 dann die Beziehung „$\sqsubseteq$" besteht, wenn ZK_2 durch semiotische Graduierung aus ZK_1 gewonnen werden kann, bzw. wenn ZK_2 von ZK_1 aus semiotisch graduierend erreichbar ist.

Mit der Bezeichnungsweise von oben läßt sich die Definition von „$\sqsubseteq$" formal so fassen:

$(3.i_1\ 2.j_1\ 1.k_1) \sqsubseteq (3.i_2\ 2.j_2\ 1.k_2)$ genau dann,
wenn gilt: $i_1 \leqq i_2$ und $j_1 \leqq j_2$ und $k_1 \leqq k_2$.

Man stellt unschwer fest, daß „$\sqsubseteq$" eine Ordnungsrelation ist, die in folgendem *Hasse*-Diagramm darstellbar ist. Hierbei sind die Hauptzeichenklassen quadratisch eingerahmt, und entlang den Strecken ist jeweils angegeben, in welchem Bezug die Semiotizität um 1 ansteigt bzw. die Trichotomie aufsteigend graduiert wird[7]. Die Ordnungsrelation ist so veranschaulicht, daß die Zeichenklasse ZK_2 im Diagramm über der Zeichenklasse ZK_1 liegt, falls $ZK_1 \sqsubseteq ZK_2$ gilt.

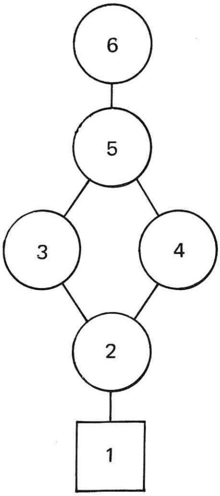


Dem *Hasse*-Diagramm lassen sich gewisse Eigenschaften der Struktur der zehn Zeichenklassen entnehmen:

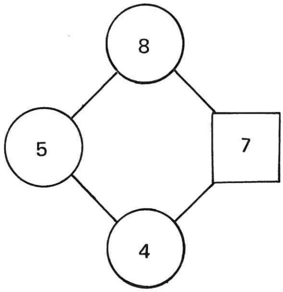
1. Die Ordnungsrelation „$\sqsubseteq$" ist nicht linear. So können etwa die 5. und die 7. Zeichenklasse bzgl. „$\sqsubseteq$" nicht verglichen werden, semiotisch gesehen kann also keine der beiden aus der anderen durch aufsteigende Graduierung erzeugt werden.

2. Da es zu je zwei Elementen der dargestellten Ordnung eine obere und eine untere Grenze[2] gibt, bilden die zehn Zeichenklassen einen Verband, in dem die 1. Zeichenklasse das kleinste und die 10. Zeichenklasse das größte Element ist. Wegen der Verbandseigenschaft gilt: $ZK_1 \sqcup ZK_2 = \sup(ZK_1, ZK_2)$, d.h., man kann die Vereinigung der Zeichenklassen ZK_1 und ZK_2 im *Hasse*-Diagramm dadurch bestimmen, daß man die kleinstmögliche Zeichenklasse ZK_3 aufsucht, die größer als ZK_1 und größer als ZK_2 ist. Z.B. liest man aus dem Diagramm ab: 6.ZK $\sqcup$ 7.ZK = 9.ZK oder 2.ZK $\sqcup$ 8.ZK = 8.ZK.

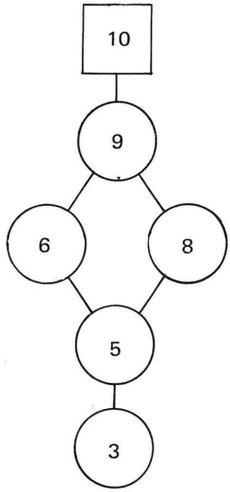
3. Die neun Teilmengen der qualitativen, singulären und gesetzmäßigen, der iconischen, indexikalischen und symbolischen, der rhematischen, dicentischen und argumentischen Zeichenklassen bilden jeweils einen Teilverband des Verbands aller zehn Zeichenklassen, z.B.



Teilverband der rhematischen Zeichenklassen



Teilverband der indexikalischen Zeichenklassen



Teilverband der Legi-Zeichenklassen

4. Einzelne Zeichenklassen weisen innerhalb des Verbandes gewisse Eigenheiten auf. Für die 10. Zeichenklasse gilt, daß sie sich nicht als Vereinigung von zwei der übrigen neun Zeichenklassen gewinnen läßt. Die 5. Zeichenklasse nimmt im Verband – intuitiv gesehen – eine zentrale Stellung ein, und bei der 7. Zeichenklasse könnte man von einer Außen- oder Randlage sprechen.

5. Im Verband der Zeichenklassen ist durch die Gleichung $ZK_1 \sqcap ZK_2 = \inf(ZK_1 ZK_2)$ ein „Durchschnitt" definiert. Ob mit dieser Verknüpfung eine semiotisch sinnvolle Vorstellung verbunden ist, und ob ihr, analog wie der Vereinigung, eine Zeichenobjektoperation zugrunde liegt, muß hier noch als offenes Problem notiert werden.

Anmerkungen

1 *M. Bense,* Einführung in die semiotische Ästhetik, Vortrag im Ästhetischen Kolloquium vom 29.10.1976 an der Universität Stuttgart.

2 Zu diesem und den folgenden mathematischen Begriffen vgl. dtv Atlas Mathematik, Bd. 1, München 1974, insbesondere: Relationen und Strukturen, S. 30–44.

3 Vgl. *E. Walther,* Allgemeine Zeichenlehre, Stuttgart 1974, S. 111f.

4 „$\sqcup$" ist von der üblichen Klassenvereinigung „$\cup$" im Rahmen der Mengenlehre zu unterscheiden.

5 a.a.O.

6 *E. Walther,* Die Haupteinteilungen der Zeichen von C.P. Peirce, in: Semiosis 3 (1976), S. 37.

7 Auf die Möglichkeit dieser zusätzlichen Angabe hat mich *B. Šipek* hingewiesen.

Résumé

La jonction des objets sémiotiques a pour conséquence une certaine «union» («⊔») des classes de signes. Concernant cette union on peut établir – selon *M. Bense* – la règle suivante: Dans tout corrélatif de la classe de signes résultant de deux classes la trichotomie la plus haute est celle qui se trouve dans les corrélatifs des classes unies. Cette règle mène à une matrice de l'union «⊔».

Dans l'ensemble des classes de signes on peut définir l'ordonné suivant: une classe de signes est en relation «⊑» avec une autre, si, dans tous les corrélatifs, la trichotomie de la classe précédante n'est pas plus haute que la trichotomie de la classe suivante. Alors les dix classes de signes forment un treillis, et il faut constater: l'union de deux classes de signes est leur supremum commun. Le treillis a des particularités, qui ont une signification sémiotique. Mais ils restent encore des problèmes à résoudre.

Summary

The junction of semiotic objects results in a certain "union" ("⊔") of classes of signs. According to *M. Bense* it may be allowed to state the following rule concerning this union: In each correlate of the resulting class of signs that trichotomy is the highest one of both trichotomies that occurs in the correlates of the united classes. This rule yields a matrix of the union "⊔".

In the set of the classes of signs the following order can be defined: a class of signs is "⊑"-related to another if in each correlate the trichotomy of the former class is not higher than the trichotomy of the latter one. The set of the ten classes of signs becomes a (mathematical) lattice. It is to be stated: the union of two classes of signs is their common supremum. The lattice shows certain peculiarities of some semiotic import. But not all problems are yet solved.

SEMIOSIS 4

Internationale Zeitschrift für Semiotik und ihre Anwendungen, Heft 4, 1976

Inhalt