Wolfgang Berger

Funktoren und die Autoreproduktion der Zeichen

Im folgenden wird der Versuch gemacht, die kategorietheoretische Betrachtungsweise, die von Bense[1] in die theoretische Semiotik eingeführt und von Marty[2] fortgesetzt wurde, in ihrem Ansatz weiter zu verfolgen. Es soll mit Hilfe sogenannter semiotischer Funktoren die Autoreproduktion der Zeichen beschrieben und am Beispiel von Ableitung und Verwerfung erläutert werden. Dabei wird sich eine Lösungsmöglichkeit für ein Problem abzeichnen, das sich im Zusammenhang mit der pragmatischen Maxime von Peirce stellt.

Ausgangspunkt für die Definition des semiotischen Funktors ist die Feststellung Benses[1], daß ein Zeichen, verstanden als geordnete triadische Relation, eine Kategorie im mathematischen Sinne bildet. Die Elemente einer solchen Kategorie Z sind Mittel M, Objekt O und Interpretant I, ihre Morphismen (Pfeile oder Abbildungen) sind die Bezeichnungsfunktion f, die Bedeutungsfunktion g und die Gebrauchsfunktion h, wobei $g \cdot f = h$ gilt. Z kann veranschaulicht werden durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h = g\cdot f"] & \\
O \arrow[rr, "g"'] & & I
\end{tikzcd}$$

und soll eine *triadische Kategorie* heißen, um den Unterschied einerseits zum Begriff der semitiotischen Kategorie[1], andererseits zu dem der fundamentalen semiotischen Kategorie[2] hervorzuheben.

Nach diesen Vorbereitungen können die Begriffe des semiotischen Funktors und Bifunktors eingeführt werden.

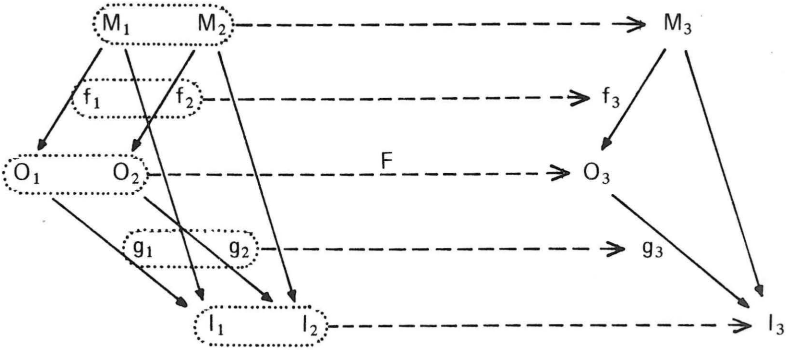
Definition: Ein *semiotischer Funktor* ist ein kovarianter Funktor[3] F zwischen zwei triadischen Kategorien Z_1 und Z_2 derart, daß F die aus dem Diagramm ersichtlichen Zuordnungen vornimmt:

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[rrrr, dashed] \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dd] & & & & M_2 \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dd] \\
O_1 \arrow[rrrr, dashed, "F"] \arrow[dr, "g_1"'] & & & & O_2 \arrow[dr, "g_2"'] & \\
& I_1 \arrow[rrrr, dashed] & & & & I_2
\end{tikzcd}$$

Aufgrund der Funktoreneigenschaft gilt:

$$F(h_1) = F(g_1 \cdot f_1) = F(g_1) \cdot F(f_1) = g_2 \cdot f_2 = h_2 .$$

Ein *semiotischer Bifunktor* ist ein Bifunktor[4] F, der zwei triadische Kategorien Z_1, Z_2 auf eine dritte triadische Kategorie Z_3 derart abbildet, daß jeweils Paaren von Mitteln, von Objekten, von Interpretanten und von Morphismen aus Z_1 und Z_2 die entsprechenden Elemente bzw. Morphismen von Z_3 so zugeordnet werden, wie es das Diagramm zeigt:



Es gilt dann:

$$F(h_1,h_2) = F(g_1 \cdot f_1, g_2 \cdot f_2) = F(g_1,g_2) \cdot F(f_1,f_2) = g_3 \cdot f_3 = h_3 .$$

Der Zweck der Definition dieser semiotischen Funktoren ist der, daß sich mit ihrer Hilfe die Autoreproduktion der Zeichen in mathematisch präziser Weise beschreiben läßt. Peirce hatte auf die Eigenschaft der Autoreproduktivität der Zeichen hingewiesen: kein Zeichen kann alleine auftreten, weil jedes Zeichen erklärt werden muß und jede Erklärung wiederum Zeichen benötigt. Jedes Zeichen erzeugt also mindestens ein weiteres Zeichen, wodurch sich folglich eine nicht abbrechende Reihe von Zeichen bildet, die durchaus nicht linear zu sein braucht, sondern sich auch verzweigen darf. In der Sprache der Kategorietheorie ausgedrückt heißt dies, daß es zu jedem Zeichen, also zu jeder triadischen Kategorie Z wenigstens einen semiotischen Funktor F gibt, welcher der Kategorie Z eine weitere triadische Kategorie Z' zuordnet. Analog läßt sich dies für Bifunktoren formulieren – und, wenn nötig, auch für semiotische *Polyfunktoren*, wobei man die obige Definition entsprechend zu verallgemeinern hat.

Das hier gewonnene erste Ergebnis, daß die Autoreproduktion der Zeichen durch und als Anwendung von semiotischen Funktoren auf triadische Kategorien bestimmt ist, soll an den autoreproduktiven Operatoren der Ableitung und der Verwerfung exemplifiziert werden.

Beide Operatoren sind dabei nicht in ihrem nur logisch-syntaktischen oder nur logisch-semantischen Sinn, sondern in ihrer vollen semiotischen Bedeutung zu verstehen. Für ihre Behandlung wird vorausgesetzt:

(1) Weil *Ableitung* und *Verwerfung* immer nur auf Sätze angewendet werden, beschränkt sich die Betrachtung auf Zeichen, die Sätze sind.

(2) Ein *Satz* ist ein Zeichen, dessen Mittel eine gesprochene oder geschriebene

Aussage, dessen Objekt ein bestehender oder nicht bestehender Sachverhalt[5] und dessen Interpretant ein Wahrheitswert (wahr oder falsch, bezeichnet mit T bzw. $\perp$) ist. Hieraus folgt die Beschränkung auf Sätze, die dicentische Zeichen sind.
(3) Sätze können durch *logische Verknüpfungen* (Konjunktion, Disjunktion, Negation) verbunden werden. Den Mitteln liegt hierbei die Boolesche Algebra der *Aussagen* mit $\wedge, \vee, \neg$, den Objekten eine Boolesche Algebra der *Sachverhalte* mit $\sqcap$, $\sqcup$, $\overline{}$ und den Interpretanten die Boolesche Algebra der beiden *Wahrheitswerte* mit $\bullet$, $+$, $-$ als Verknüpfungen zugrunde.
(4) Die Ausführungen zu Ableitung und Verwerfung behandeln nur den aussagenlogischen Fall.

Mit diesen Voraussetzungen läßt sich die *Ableitung* durch einen semiotischen Bifunktor A erfassen. A ist definiert durch drei Bestimmungsstücke:
(a) in Anwendung auf *Aussagen* ist A bestimmt durch die Abtrennungsregel [6]

$$\frac{M_1, \neg M_1 \vee M_3}{M_3} \quad ,$$

also durch $A(M_1, M_2) = A(M_1, \neg M_1 \vee M_3) = M_3$, wobei $M_2 = \neg M_1 \vee M_3$ ist;
(b) für *Sachverhalte* genügt A der Beziehung
$A(O_1, O_2) = A(O_1, \overline{O}_1 \sqcup O_3) = O_3$, wobei $O_2 = \overline{O}_1 \sqcup O_3$ ist;
(c) beschränkt auf *Wahrheitswerte*, erfüllt A die Gleichung
$A(I_1, I_2) = A(I_1, -I_1 + I_3) = I_3$, wobei $I_2 = -I_1 + I_3$ ist.

Jede Ableitung ist nun als eine semiotische Autoreproduktion aufzufassen, deren Zeichenübergänge durch den Bifunktor A bewirkt werden. Dabei geht sie etwa von Prämissen $p_1, p_2 .., p_n$ aus und kann zusätzlich Gebrauch machen von Axiomen nach den Schemata [6]:

(Ta) $\neg (P_1 \vee P_1) \vee P_1$
(Tb) $\neg P_1 \vee (P_1 \vee P_2)$
(Tc) $\neg (P_1 \vee P_2) \vee (P_2 \quad P_1)$
(Td) $\neg (\neg P_1 \vee P_2) \vee (\neg (P_3 \vee P_1) \vee (P_3 \vee P_2))$.

Der semiotische Bifunktor A hat die Eigenschaft, daß er, bezogen auf seine Richtung, die Wahrheit nach vorne und die Falschheit nach hinten überträgt. Unter geeigneten Voraussetzungen, vor allem dann, wenn in der oberen Zeile der Abtrennungsregel der zweite Satz ein Axiom ist, findet man von der falschen Konklusion leicht zur falschen Prämisse zurück.

Die *Verwerfung*, in der Logik bisher recht stiefmütterlich behandelt, kann zunächst so umrissen werden: Sie ist ein Rejektionsverfahren, das von Sätzen zu Sätzen übergeht, wobei die resultierenden Sätze dann falsch sind, wenn die Ausgangssätze als falsch bekannt sind. Genauer läßt sich die Verwerfung mit Hilfe eines semiotischen Bifunktors V charakterisieren. V wird durch drei Bestimmungsstücke gegeben:
(a) in Anwendung auf *Aussagen* ist A definiert durch die Abtrennungsregel [6]:

$$\frac{M_1, \neg M_1 \wedge M_3}{M_3} \quad ,$$

also durch:

$V(M_1,M_2) = V(M_1,\neg M_1 \wedge M_3) = M_3$, wobei $M_2 = \neg M_1 \wedge M_3$ ist;

(b) für *Sachverhalte* erfüllt A die Bedingung:

$V(O_1,O_2) = V(O_1,\bar{O}_1 \sqcap O_3) = O_3$, wobei $O_2 = \bar{O}_1 \sqcap O_3$ ist;

(c) beschränkt auf *Wahrheitswerte,* gilt für A die Gleichung:

$V(I_1, I_2) = V(I_1,(-I_1)\cdot I_3) = I_3$, wobei $I_2 = (-I_1)\cdot I_3$ ist.

Wie jede Ableitung so ist auch jede Verwerfung als eine semiotische Autoreproduktion zu verstehen, deren Zeichenübergänge durch den Bifunktor V bewirkt werden. Dabei beginnt sie etwa mit Ausgangszeichen $p_1,p_2,..,p_n$ und kann außerdem Gebrauch machen von Antiaxiomen nach den Schemata[6]:

($\perp$ a) $\neg(P_1 \wedge P_1) \wedge P_1$
($\perp$ b) $\neg P_1 \wedge (P_1 \wedge P_2)$
($\perp$ c) $\neg(P_1 \wedge P_2) \wedge (P_2 \wedge P_1)$
($\perp$ d) $\neg(\neg P_1 \wedge P_2) \wedge (\neg(P_3 \wedge P_1) \wedge (P_3 \wedge P_2))$.

Der Verwerfungsfaktor V hat die Eigenschaft, daß er, bezogen auf seine Richtung, die Wahrheit nach hinten und die Falschheit nach vorne überträgt. Unter geeigneten Bedingungen, insbesondere dann, wenn der zweite Satz in der oberen Zeile der Abtrennungsregel ein Antiaxiom ist, findet man vom wahren Sukzedens leicht zum wahren Antezedens zurück.

Im Rahmen der bisher angestellten semiotisch-kategorietheoretischen Überlegungen soll jetzt noch eine Lösungsmöglichkeit für ein Problem erörtert werden, das sich im Zusammenhang von semiotischer Autoreproduktion und pragmatischer Maxime ergibt.

Frau Buczyńska-Garewicz hat in dieser Zeitschrift[7] die Autoreproduktion der Symbole ausführlich beschrieben und dabei deutlich die Verbindung zur pragmatischen Maxime von Peirce herausgestellt: Durch die Autoreproduktion bildet sich eine im Prinzip unendliche Reihe von Symbolen; damit nun das Ausgangssymbol und alle weiteren Symbole eine Bedeutung erhalten, muß die Reihe abgebrochen werden, und dazu braucht man eine praktische Regel. Das ist, in verkürzter Form zusammengefaßt, der wesentliche Inhalt der pragmatischen Maxime.

Hier stellt sich das angesprochene Problem: Die pragmatische Maxime ist ein Postulat, das die Aufstellung einer praktischen Regel fordert, diese Regel aber für den Einzelfall nicht angibt, ja, nicht einmal andeutet, auf welche Weise diese Regel zu gewinnen ist.

Die Frage also: Woran soll man sich halten, wenn man eine solche praktische Regel aufstellen muß? Und im Rahmen der vorangegangenen Begriffsbildung kann die Antwort nur lauten: Man hat sich an den semiotischen Funktoren, durch welche die betreffende Autoreproduktion beschrieben wird, zu orientieren. Das folgende Beispiel soll einerseits dies erläutern und andererseits zeigen, welches grundlegende Prinzip dabei berücksichtigt werden muß.

Mit Hilfe der semiotisch-autoreproduktiven Funktoren der Ableitung und der Verwerfung läßt sich für Sätze, die dicentisch-symbolische Legizeichen sind, z.B. das

Problem lösen: Welcher Wahrheitswert ist einem Satz d zuzuordnen, von dem man weiß, daß er entweder wahr oder falsch (dicentisch) ist, von dem aber unbekannt ist, ob er wahr oder falsch ist? Um den Wahrheitswert von d zu ermitteln, kann man auf d den semiotischen Funktor A anwenden; gelangt man in endlich vielen Schritten zu einem Satz p, der sich aufgrund von Beobachtung als falsch herausstellt (p ist dann dicentisch-indexikalisches Sinzeichen, also doppelte Replica [8] von 3.2 2.3 1.3), dann ist auch d falsch. Dies beruht auf dem Prinzip der Rückwärtsübertragung der Falschheit durch A. Schlägt dieses Verfahren fehl, so kann man auf d den semiotischen Funktor V anwenden; erreicht man in endlich vielen Schritten einen aufgrund von Beobachtung wahren Satz p, dann ist auch d war. Dies beruht auf dem Prinzip der Rückwärtsübertragung der Wahrheit durch den Funktor V. Die praktische Regel, die dem Symbol d als Bedeutung einen Wahrheitswert zuordnet, kann zusammenfassend wie folgt formuliert werden:

(a) d erhält den Wahrheitswert T, wenn es einen Satz p gibt, so daß gilt:
  - (a1) d ist einziges Ausgangszeichen mit unbekanntem Wahrheitswert für eine autoreproduktive Reihe von Zeichen, die durch den semiotischen Bifunktor V erzeugt wird,
  - (a2) p kommt in dieser Reihe vor,
  - (a3) p ist wahr;

(b) d erhält den Wahrheitswert $\perp$, wenn es einen Satz p gibt, so daß gilt:
  - (b1) d ist einziges Ausgangszeichen mit unbekanntem Wahrheitswert für eine autoreproduktive Reihe von Zeichen, die durch den semiotischen Bifunktor A erzeugt wird,
  - (b2) p kommt in dieser Reihe vor,
  - (b3) p ist falsch.

Aus diesem Beispiel können die Grundzüge eines allgemeinen Verfahrens herauspräpariert werden, das zur Aufstellung einer praktischen Regel führt, wie sie von der pragmatischen Maxime gefordert wird:

Wenn ein Zeichen mit unbekannter Bedeutung vorliegt und ihm eine Bedeutung aus einem bestimmten, evtl. vorgegebenen Interpretantenfeld zugeordnet werden soll, so hat man:
1. die zu Zeichen der betreffenden Art gehörenden Autoreproduktionen mit Hilfe von semiotischen Funktoren zu beschreiben und
2. darauf zu achten, daß die Funktoren so angelegt werden, daß sie die in Frage kommenden Bedeutungen nach rückwärts vermitteln, ihnen also ein *Prinzip der Rückwärtsübertragung der Bedeutung* zugrundeliegt.

Anmerkungen

1 vgl. M. Bense, Das System der Theoretischen Semiotik, *Semiosis* 1 (1976), S. 24–28 und M. Bense, „Semiotische Kategorien und algebraische Kategorien. Zur Grundlagentheorie der Mathematik", *Semiosis* 4 (1976), S. 5–19.

2 vgl. R. Marty, „Categories et foncteurs en semiotique", *Semiosis* 6 (1977).

3 vgl. S. MacLane, *Kategorien*, Berlin–Heidelberg–New York 1972, S. 35.

4 vgl. S. MacLane, a.a.O., S. 38.

5 Die Theorie der Sachverhalte ist semiotisch unbearbeitetes Feld. Darum wird hier auch nicht weiter auf die Morphismen f und g eingegangen. Man kann wohl davon ausgehen, daß die Sachverhalte eine Boolesche Algebra bilden, deren Operationen mit $\sqcap$, $\sqcup$, $^{-}$ bezeichnet werden sollen, um nicht allzuschnell die mengenalgebraische Deutung nahezulegen. Eingehendere Ausführungen zu diesen Problemen müssen einer späteren Arbeit vorbehalten werden.

6 vgl. Ch.G. Morgan, „Sentential Calculus for Logical Falsehoods", *Notre Dame Journal of Formal Logic,* Vol. XIV, No. 3 (1973), S. 347–353.

7 vgl. H. Buczyńska-Garewicz, „Der Interpretant, die Autoreproduktion des Symbols und die pragmatische Maxime", *Semiosis* 2 (1976), S. 10–17.

8 vgl. E. Walther, *Allgemeine Zeichenlehre*, Stuttgart 1974, S. 86f.

Summary

The present paper results in two items:

1. It is possible to describe the autoreproduction of signs by the notion of so called *semiotical functor,* which is defined in terms of the mathematical theory of categories.

2. In order to give meaning to a sign occurring in an autoreproduction the semiotical functors of this autoreproduction have to fullfill the *principle of backward transmission of meaning.* This is shown by the examples of deduction and rejection.

SEMIOSIS 6

Internationale Zeitschrift für
Semiotik und ihre Anwendungen,
Heft 2, 1977

Inhalt