Peter Beckmann

SEMIOTISCHE ANALYSE EINIGER GRUNDBEGRIFFE DER INTUITIONISTISCHEN SOWIE DER FORMALISTISCHEN MATHEMATIK

Op de vraag, waar de wiskundige exactheid dan wel bestaat, antwoorden beide patijen verschillend; de intuitionist zegt: in het menschelijk intellect, de formalist: op het papier.

(L. E. J. Brouwer: Intuitionisme en formalisme; Amsterdam 1912)

The question where mathematical exactness does exist, is answered differently by the two sides; the intuitionist says: in the human intellect, the formalist says: on paper.

(L. E. J. Brouwer: Intuitionism and Formalism; Bull. Amer. Math. Soc. 20, 1913)

Obwohl das Begründungsproblem gegenwärtig für die Mathematik längst nicht mehr jene Brisanz besitzt wie zur Jahrhundertwende, als die Entdeckung von Antinomien in der Cantorschen Mengenlehre, dem neuen Fundament der Mathematik, durch Burali-Forti und Russell das ganze Gebäude zum Einsturz zu bringen drohte, bleibt es als erkenntnis- und wissenschaftstheoretisches Problem heute genauso aktuell wie zu Zeiten der erwähnten Grundlagenkrise der Mathematik. Daß die Mathematiker längst wieder ruhig ihrer Arbeit nachgehen, liegt u. a. daran, daß die Mengenlehre inzwischen axiomatisiert vorliegt - etwa in der Form von Zermelo-Fraenkel. Man konnte zwar bislang kein Modell für dieses Axiom-System angeben, aber andererseits ließen sich auch keine Widersprüche in der mengentheoretisch aufgebauten Mathematik entdecken. *"Die Wahrscheinlichkeit solcher Widersprüche wird mit der Erfahrung immer geringer; das Auftreten eines solchen würde wohl kaum mehr das Gebäude als Ganzes antasten, sondern aller Wahrscheinlichkeit nach nur ein paar - gewissermaßen 'schalttechnische' - Modifikationen notwendig machen: eine 'Grundlagenkrise', der vergleichbar, die von den klassischen Antinomien der Cantorschen Mengenlehre ausgelöst wurde und heute im wesentlichen der Geschichte angehört, ist wohl nicht mehr zu erwarten."* (J. Schmidt in [1], S. 42).

Die dennoch vorhandene Aktualität des Begründungsproblems der Mathematik - das heißt im wesentlichen: die Mathematik entweder formalistisch oder intuitionistisch (manchmal auch: konstruktiv) zu begründen - ist beispielsweise in mehreren Veröffentlichungen von G. Kreisel nachgewiesen worden: etwa in [2], Anhang II, [3]. Kreisel wendet sich emphatisch und polemisch gegen den "Neo-Formalismus", der z. B. durch Bourbaki verbreitet ist: *"Diese ... was Po-*

pularität anbetrifft, so überaus glorreiche Doktrin scheut sich nicht, <u>*die*</u> *... Frage zu beantworten, die zur Zeit noch nicht einmal genau formuliert, geschweige denn gelöst werden kann, ob es hinreichend abstrakte, aber noch präzise Begriffe gibt, womit die gesamte Mathematik charakterisiert werden könnte.* ([2], S. 271; Umstellungen von mir.)

Mathematik, so heißt es, bestehe aus Behauptungen der folgenden Form: eine vorliegende Zeichenfolge wurde mit den und den mechanischen Regeln konstruiert. ...Allgemeine Behauptungen über solche Zeichenfolgen gehören schon nicht mehr zur Mathematik. Natürlich kann daher auch ... das Hilbertsche Widerspruchsfreiheitsproblem nicht mehr formuliert werden, da ja dort eine <u>*Variable x*</u> (für Formelfolgen, P. B.) *vorkommt."* (S. 272)

Die für die neo-formalistische Doktrin typische Haltung, informale, nämlich philosophisch-erkenntnistheoretische Grundlagenprobleme als nicht existierend oder gar sinnlos zu betrachten, rührt nach Kreisel daher, daß das ursprüngliche Programm Hilberts, die Widerspruchsfreiheit der elementaren Zahlentheorie (bzw. Arithmetik) mit finiten Methoden zu beweisen (ich werde weiter unten darauf zurückkommen), aufgrund von Gödels Unvollständigkeitssatz gescheitert ist.

Hilbert selbst hat bereits 1934 in seiner Einleitung zu [3a] gegen diesen Irrglauben Stellung genommen und empfand Gödels Resultat lediglich als Korrektur, nicht als Widerlegung seines Programms.

Eine wirkliche Alternative zum Formalismus Hilberts ist der durch L. E. J. Brouwer begründete "moderne" Intuitionismus. Brouwer hat in mehreren seiner Aufsätze den Hilbertschen Formalismus kritisiert, während sich Hilbert nur in gelegentlichen Bemerkungen mit Brouwers Intuitionismus auseinandersetzte.

Eine *semiotische* Analyse von Grundbegriffen der beiden Hauptströmungen in der Mathematik dieses Jahrhunderts setzt natürlich voraus, daß die Semiotik als Analyse-Instrument adäquat ist. Nun hat aber bereits Peirce selbst die Mathematik mit Hilfe seiner Zeichentheorie begründet (etwa in [4]), so daß die Peircesche Zeichentheorie samt ihrer Weiterentwicklung durch M. Bense und E. Walther als Mittel der Analyse ausreichend legitimiert erscheint.

Liest man Peirces "On the Foundations of mathematics", so hat man zunächst den Eindruck, als schreibe Peirce über alle möglichen Zeichensysteme, nur nicht über die Grundlagen der Mathematik. Doch bald wird seine Absicht klar: Er möchte mit seiner tiefgehenden Analyse des Zeichenbegriffs die erforderlichen Voraussetzungen schaffen, um daraus die Grundlagen der Mathematik zu *ab*duzieren, denn vermutlich hätte Peirce die tatsächlichen und die *möglichen*

Grundlagen dargestellt. Der Konjunktiv "hätte" deutet an, daß er dieses Ziel aufgrund des fragmentarischen Charakters seines (nur in deutscher Übersetzung bisher veröffentlichten) Manuskriptes (Nr. 7) nicht weiter verfolgt hat.

Einen weiteren, umfassenderen Zugang zur Erkenntnistheorie, also auch zur Erkenntnis in der Mathematik, bietet Peirces Philosophie des Pragmatismus. Weil der Pragmatismus durch deutliche operationalistische Charakterzüge geprägt ist, gelang es E. Walther in ihrer Einleitung [5], eine Brücke zur intuitionistischen Mathematik, die ähnliche Eigenschaften besitzt, zu schlagen:

"Hinzuweisen wäre in diesem Zusammenhang noch auf die Deutungsversuche logischer Formeln, die A. Heyting (in: Die Intuition. Grundlegung der Mathematik; Erkenntnis 2, 1931, sowie: Math. Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie; 1934) und A. Kolmogoroff (in: Zur Deutung der intuition. Logik; Math. Zeitschrift 35 (1932) vom Standpunkt des konstruktivistischen Intuitionismus durchgeführt haben. Heyting faßt die Sätze als Intentionen auf 'Konstruktionen' auf und Kolmogoroff versteht sie als 'Aufgaben'."

Brouwer, der Lehrer von Heyting, führte seine Grundidee oder Ur-Intuition, die die Betonung des konstruktiven Standpunktes der intuitionistischen Mathematik zur Folge hatte, auf Kant zurück:

"In Kant we find an old form of intuitionism, now almost completely abandoned, in which time and space are taken to be forms of conception inherent in human reason. For Kant the axioms of arithmetic and geometry were synthetic a priori judgements, i. e., judgements independent of experience and not capable of analytical demonstration; and this explained their apodictic exactness in the world of experience as well as in abstracto." ([6], S. 124).

Hier schließen sich zwanglos die einleitenden und grundlegenden Sätze seiner Schrift [7] an, obwohl er sie vier Jahre früher geschrieben hat:

"Wenn man untersucht, wie die mathematischen Systeme zustandekommen, findet man, daß sie aufgebaut sind aus der Ur-Intuition der Zweieinigkeit.
Die Intuition des continuierlichen und des discreten finden sich hier zusammen, weil eben ein Zweites gedacht wird nicht für sich, sondern unter Festhaltung der Erinnerung des Ersten. Das Erste und das Zweite werden also z u s a m m e n g e h a l t e n , und in dieser Zusammenhaltung besteht die Intuition des continuierlichen (continere = zusammenhalten). Diese mathematische Ur-Intuition ist nichts anderes als die inhaltslose Abstraction der Zeitempfindung, d. h. der Empfindung von 'fest' und 'schwindend' zusammen, oder von 'bleibend' und 'wechselnd' zusammen.

Die Ur-Intuition hat in sich die Möglichkeit zu den beiden folgenden Entwicklungen:

1) Die Construction des Ordnungstypus ω; wenn nämlich die ganze Ur-Intuition als ein neues Erstes denkt, kann man ein neues Zweites hinzudenken, das man 'drei' nennt, usw.

2) Die Construction des Ordnungstypus η; wenn man die Ur-Intuition empfindet als den Übergang zwischen dem 'Ersten für sich' und dem 'Zweiten für sich', ist die 'Zwischenfügung' zustande gekommen.

Natürlich kann man stets ein ganzes schon mittels der Ur-Intuition aufgebautes mathematisches System als neue Einheit nennen, und hieraus erklärt sich die unendliche Fülle der in der Mathematik möglichen Systeme, die indes alle auf die beiden genannten Ordnungstypen zurückzuführen sind."

Es erscheint erforderlich, einige Tatsachen aus diesen Brouwerschen Überlegungen festzuhalten, um die spätere semiotische Analyse zu erleichtern.

I) Grundlegend ist eine Qualität, die Qualität der Zeitempfindung.

II) Es erfolgt eine *Zerlegung* dieser zunächst ganzheitlichen Qualität in zwei verschiedene Qualitäten: "fest", "schwindend" bzw. "bleibend", "wechselnd".

III) Vom Inhalt dieser Qualitäten, den Apperzeptionen, wird abstrahiert.

IV) Die so entstandene "Zweieinigkeit" wird als ein neues Erstes gedacht.

V) Dieses neue Erste wird durch abermalige Zerlegung von einer weiteren ganzheitlichen Qualität separiert, so daß ein neues Zweites entsteht, das man, bezogen auf die beiden ersten Abstrakta, "drei" nennen kann. - Dieser Vorgang läßt sich fortsetzen.

VI) Empfindet man bei den ersten beiden Qualitäten den *Übergang* von der ersten zur zweiten als Ur-Intuition, so läßt sich eine Zwischenqualität apperzipieren, von der zu einem inhaltslosen "Zwischen" abstrahiert werden kann.

Die Bedingung VI) (2) bei Brouwer) dient dazu, einen "continuierlichen" und "fertigen" Bereich zu erzeugen, der aber nur eine "Matrix" und keine Menge ist. Da aber die formalistisch fundierte (Hilbertsche) Mathematik auf dem Begriff der Cantorschen Menge aufbaut, soll die Ur-Intuition der Zwischenqualität, die "nur" zur Erzeugung einer continuierlichen Matrix führt, nicht näher betrachtet werden.

Die folgende, auf den Bedingungen I) - V) beruhende exakte Definition einer Menge im Brouwerschen Sinn (engl. spread, nicht set!) entnehme ich der Arbeit *[8]*, weil sie etwas kürzer ist als die ursprüngliche von 1918 in *[7]*. In einem einleitenden Satz wird die zeichentheoretische Natur der Mathematik deutlich:

"Der Mathematik liegt eine unbegrenzte Folge von Zeichen bzw. endlichen Zeichenreihen zugrunde, welche bestimmt wird durch ein erstes Zeichen und das Gesetz, das aus jeder dieser Zeichenreihen die nächstfolgende herleitet; insbesondere ist zu diesem Zwęck die Folge der 'Nummern' 1, 2, 3, 4, 5, ... brauchbar.

D_1: Eine M e n g e ist ein G e s e t z , auf Grund dessen, wenn immer wieder eine willkürliche Nummer gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder eine bestimmte Zeichenreihe mit oder ohne Beendigung des Prozesses erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses mitsamt der definitiven Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes n > 1 nach jeder unbeendigten und ungehemmten Folge von n-1 Wahlen, wenigstens eine Nummer angegeben werden kann, die, wenn sie als n-te Nummer gewählt wird, n i c h t die Hemmung des Prozesses herbeiführt. ...

D_2: Jede in dieser Weise von einer unbegrenzten Wahlfolge erzeugte Folge von Zeichenreihen (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist) heißt ein E l e m e n t d e r M e n g e . ... Mengen und Elemente von Mengen werden m a t h e m a t i s c h e E n t i t ä t e n genannt.

D_3: Unter einer S p e z i e s e r s t e r O r d n u n g verstehen wir eine (begrifflich fertig definierte) Eigenschaft, welche nur eine mathematische Entität besitzen kann, in welchem Falle sie ein E l e m e n t d e r S p e z i e s e r s t e r O r d n u n g genannt wird. Die Mengen bilden besondere Fälle von Spezies erster Ordnung."

Zur semiotischen Analyse von I) - V) sowie D_1 - D_3 (diese Bezeichnungen stammen von mir) benutze ich die drei Peirceschen Fundamentalkategorien, die daraus abgeleitete grundlegende triadische Zeichenrelation $Z = \langle M, O, I \rangle$, die durch Zerlegung von Z in seine Komponenten entstandenen neun Subzeichen (qua, sin, leg, ico, ind, sym, rhe, dic, arg), sowie die daraus durch Einführung einer teilweisen Ordnungsrelation entstandenen zehn Peirceschen Zeichenklassen $K_1, \ldots, K_{10}$. Diese semiotischen Begriffe seien zunächst i n t e n s i o - n a l aufgefaßt, d. h. im Sinne von Kreisel [3] als Eigenschaften, deren Geltungsbereich man zunächst nicht genau (also nicht extensional) kennt.

Zweckmäßigerweise lassen sich die Brouwerschen Begriffsbildungen in fünf Gruppen zusammenfassen: I) - III), IV) - V), D_1, D_2, D_3. Bei I) handelt es sich, wie gesagt, um die Qualität der ganzheitlichen Zeitempfindung, der sich

Qualizeichen des *Zeitverlaufs zuordnen* lassen.*

In II) werden dem "Zeitverlauf" die Icone (genauer: als Metazeichen die Legizeichen) "fest", "schwindend" bzw. "bleibend", "wechselnd" zugeordnet (etwa darstellbar als "______", "vvvv"), die deshalb Icone sind, weil sie wahrnehmbaren *Sachverhalten* entsprechen. Bei III) handelt es sich um einen typischen Abstraktionsvorgang, der die Beziehung zwischen "______", "vvvv" und ihrem Objektbereich, den konstanten und variablen Zeitempfindungen, durch willkürliche Setzung annulliert. Wir haben es daher mit Symbolen zu tun, etwa "eins", "zwei", oder "1", "2", denn die Bedingung $L(S(\mathfrak{M})) \cap L(S(\mathcal{O})) = \{\}$, die ich in /9/ aufgestellt habe, ist offenbar erfüllt. Wir haben es also in der Abfolge I)-III) mit einem Veränderungsprozeß an Zeichen, d. h. mit einer Transformation qua $\longrightarrow$ ico $\longrightarrow$ sym zu tun. (Eine noch stärkere Betonung der "Erstheit" erhielt Bense in [10], S. 72-73.)

IV)-V) wird gleich in ikonischer Darstellung behandelt:
Aus ______, vvvv bzw. vvvv, ______ (Kommutativität!) läßt sich ohne weiteres durch Adjunktion ______, vvvv, ______ bzw. vvvv, ______, vvvv gewinnen, was zu "drei" bzw. "3" führt.

Die abzählbar-unendliche Iteration dieses Vorganges liegt auf der Hand und läßt sich auf der symbolischen Ebene durch eine *rekursive Definition* erreichen. Der in D_1 als Ganzes, nämlich als *Gesetz* aufgefaßte und verallgemeinerte Vorgang I)-V) ist also in erster Näherung eine abstrahierende Transformation mit anschließender Iteration.

Weitere Analyse von D_1: 1. In ihrem Mittelbereich sind die Zeichenreihen der intuitionistischen Mathematik ursprünglich *Qualizeichen,* da sie sich auf die Qualität der zeitabhängigen Ur-Intuition beziehen. 2. Die "Nummern" 1, 2, 3, ... aus D_1 bezeichnen gemäß IV)-V) ihren 1. Objektbereich - gegenstandsfreie zweisortige Zeitempfindungen - *symbolisch.* 3. Jede "Nummer" n bezeichnet nach ihrer Wahl ihren 2. Objektbereich - den Entstehungsprozeß zur Menge - *indexikalisch,* denn sie ist Teil dieses Prozesses, d. h. die Bedingung $L(S(\mathfrak{M})) \subseteq L(S(\mathcal{O}))$ aus [9], Diag. 2, ist erfüllt. 4. Die Wahlakte bewirken, daß die Zeichenreihen der intuitionistischen Mathematik stark interpretantenab-

---

* Diese Zeitempfindung wird von Brouwer nur sehr vage beschrieben; er erklärt z. B. nicht, woran er sie fixiert bzw. mit welchen Sinnesorganen er sie wahrnimmt. Vermutlich verzichtet er deswegen auf eine genauere Beschreibung der Zeitempfindung mittels Qualizeichen (etwa durch Tonfolgen, die im Objektbereich ikonisch sein müßten), weil er sie ohnehin zu *Legizeichen* wie "fest", "schwindend" als Metazeichen transformiert (abstrahiert), die indexikalische bzw. symbolische Objektbereiche besitzen können.

hängig sind, und zwar derart, daß die Wahlen (als fertiges Zeichenmittel betrachtet) eine Behauptung über Fortsetzung, Beendigung oder Hemmung des Entstehungsprozesses zur Menge beinhalten, also im Interpretantenbereich *dicentisch* sind.

Zusammenfassung für D_1: Eine Menge im Sinne der intuitionistischen Mathematik ist ein *vollständiges* Zeichen, das einen verallgemeinerten Iterationsprozeß gesetzmäßig beschreibt, und das im Mittelbereich ein *Qualizeichen,* im Objektbereich einmal als *Symbol,* zum anderen als *Index* fungiert und im Interpretantenbereich ein *Dicent* darstellt. Es handelt sich offenbar nicht um eine Zeichenklasse.*

Für D_2 (Element der int. Mathematik) gelten 1. bis 3. von oben, doch im Interpretantenbereich stellt ein Element einer Menge ein *Rhema* dar, denn es ist ja in seinem Konnex als "offen" zu verstehen, d. h. es ist "nicht fertig darstellbar" (Brouwer). Ein solches Element der intuitionistischen Mathematik ist offenbar ein vollständiges Zeichen, das wiederum keine Zeichenklasse ist.

Eine Spezies (erster Ordnung) ist ein Stufenzeichen oder Metazeichen, das also einen Objektbereich aus Zeichen besitzt. Im Mittelbereich ist eine Spezies sicher ein *Legizeichen,* da das Zutreffen einer Eigenschaft auf Entitäten letztlich mittels Konventionen unter Wissenschaftlern entschieden wird.

Im Objektbereich reduzieren sich die Feststellung 2. und 3. zu 2., denn von indexikalischer Bezeichnungsweise wird abstrahiert; eine Spezies ist also im Objektbereich ein *Symbol.* Die Spezies ist sicher ein intensionaler Begriff, d. h. der Umfang dieses Begriffs läßt sich nicht genau beschreiben, weder mathematisch noch logisch. Daher muß eine Spezies in ihrem interpretativen Konnex als offen, also als *Rhema* verstanden werden.

Die Spezies gehört damit als einziger der behandelten intuitionistischen Grundbegriffe zu einer Zeichenklasse, nämlich zu $K_8 = \{3.1, \quad 2.3, \quad 1.3\}$.

Der Cantorsche Mengenbegriff der formalistischen Mathematik wird durch ein Axiom-System implizit festgelegt (meist durch das Zermelo-Fraenkelsche) und ist daher nur sehr schwer mit dem Brouwerschen zu vergleichen. Andererseits benötigt man auch "nur" das Peanosche Axiom-System, um Hilberts Programm, die Widerspruchsfreiheit "der" Mathematik, genauer der Arithmetik, als fun-

* Es sei denn, man faßt die Zeichen "fest", "schwindend" tatsächlich im Mittelbereich als Legizeichen auf. Dann erhält man die Zeichenklassen $K_7 = \{3.2, 2.2, 1.3\}$ bzw. $K_9 = \{3.2, 2.3, 1.3\}$: Bei der sich anschließenden Analyse von D_2 gilt entsprechendes.

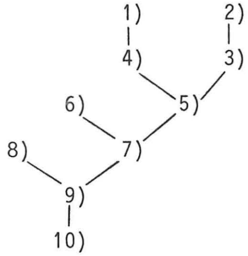
damentalem Teilgebiet zu beweisen, mit semiotischen Hilfsmitteln zu analysieren; denn Hilbert wollte die Widerspruchsfreiheit des *Peano-Systems*, vermehrt um formalisierte Schlußregeln und logische Formeln, beweisen. Die Möglichkeit, die Widerspruchsfreiheit einer formalisierten mathematischen Theorie nachzuweisen, die wesentlich auf dem logischen Prinzip des "tertium non datur" beruht, wurde (und wird) von den Intuitionisten aufs heftigste bestritten, sofern man dieses Prinzip auf unendliche Individuenbereiche, wie die (Cantorsche!) Menge der natürlichen Zahlen anwendet, was Hilbert tat.

Eine knappe Zusammenfassung seines Programms findet man in ([3a], S. 18):

"Wir gelangen somit zu folgender Aufgabenstellung: 1. die Prinzipien des logischen Schließens streng zu formalisieren und dadurch zu einem völlig überblickbaren System von Regeln zu machen; 2. für ein vorgelegtes Axiomensystem (...) den Nachweis zu führen, daß beim Ausgehen von diesem System mittels logischer Deduktionen kein Widerspruch zustande kommen kann, d. h. daß nicht zwei Formeln beweisbar werden, von denen die eine die Negation der anderen ist."

Weil es mir nur auf eine exemplarische Analyse grundlegender Begriffe ankommt, werde ich nur den formalisierten Beweis (die formale Ableitung) behandeln. Aufgrund logischer Betrachtungen genügt es, eine bestimmte widersprüchliche arithmetische Formel, wie $0 \neq 0$, in dem formalisierten System als unableitbar nachzuweisen. Positiv gewendet: Wenn in jeder Ableitung, die Hilbert wegen ihrer graphischen Darstellbarkeit *Beweisfigur* nennt, jede auftretende Formel verfizierbar, d. h. in eine wahre numerische Formel durch Ersetzung übertragbar ist, dann können solche Formeln wie $0 \neq 0$ nie auftreten, und die Widerspruchsfreiheit des formalen Systems ist bewiesen.

Was ist nun aber eine Beweisfigur? Hilbert gibt dafür mehrere Beispiele an; das erste ([3a], S. 222) sei zitiert:



An den mit 1), ..., 10) bezeichneten Stellen stehen allgemeingültige Formeln der Aussagenlogik oder Formeln (Aussagen bzw. Aussageformen) der Arithmetik. Beispielsweise vertritt 1) das Peano-Axiom $a < b \wedge b < c \Longrightarrow a \dot{<} c$ und 10) vertritt $\neg(2 < 1)$.

Abb. 1

Senkrechte Verbindungsstriche bedeuten Einsetzungen, schräge bedeuten Schlußfolgerungen nach dem modus ponens. Z. B. folgt aus Formel 4) und Formel 3) die Formel 5).

Was ist nun eine Beweisfigur in semiotischer Sicht?

An den Verzweigungs- bzw. Endpunkten des "Beweisbaumes" stehen wie gesagt entweder allgemeingültige logische oder erfüllbare (d. h. bei Einsetzungen wahre) arithmetische Formeln. Formeln sind Metazeichen für Aussagen oder Zahlen. Beide - Aussagen und Zahlen - bezeichnen ihre Objektbereiche, nämlich zum einen Sachverhalte (endlicher Anzahl), zum anderen wohlunterscheidbare Gegenstände (endlicher Anzahl) symbolisch, weil von allen möglichen Beziehungen zwischen Aussagen und Sachverhalten einerseits und zwischen Zahlen und Gegenständen andererseits in der formalistischen Mathematik (ähnlich wie in der intuitionistischen) abstrahiert wird, außer daß sie jeweils einander eindeutig bezeichnen oder nicht bezeichnen: tertium non datur.

Diese Hypothese beruht auf einer klassischen Tradition, die von Frege und Russell bis Hilbert reicht, d. h. sie beruht letztlich auf "formalistischen" Konventionen. Formeln sind demnach bezüglich ihres Mittelbereichs *Legizeichen*.

Die weiterhin in der Beweisfigur dargestellten Einsetzungs- bzw. Schlußschemata sind strenggenommen Abbildungen, die entweder durch Einsetzen genau eine Formel auf genau eine (andere) Formel abbilden, z. B. $\begin{smallmatrix}2)\\ \vert\\ 3)\end{smallmatrix}$ oder einem *Paar* von Prämissen genau eine Konklusion zuordnen, z. B. $\begin{smallmatrix}6) & & 5)\\ & \searrow\swarrow & \\ & 7) & \end{smallmatrix}$. Beide fungieren also in ihrem zugehörigen Objektbereich der Schlußschemata für Teilbeweisfiguren *ikonisch*.* Da eine Beweisfigur durch Superierung von Teil-Beweisfiguren entsteht, denn über jeder Formel können wieder Teil-Beweisfiguren stehen, ausgenommen die Anfangsformeln, haben wir es hier mit einem *Superikon* zu tun.

Andererseits verkörpert eine Beweisfigur allein durch ihre Existenz und Komposition die Wahrheit einer Endformel bezüglich einer formalen Ableitung, also ist sie in bezug auf ihren Interpretantenbereich als *Argument* zu verstehen.

Hinsichtlich der Peirceschen Zeichenklassen erhalten wir das folgende Ergebnis: Beweisfiguren als solche sind zwar Superikone, aber gleichwohl argumentisch-symbolische Legizeichen.

---

* Auf die Ikonizität von Schlußschemata weist Peirce wiederholt hin. Besonders überzeugend scheint mir CP 4.75.

Semiotische Analyse des "Tertium non datur"

Wie bereits erwähnt, ist die intuitionistische bzw. die formalistische Auffassung der Rolle des Tertium non datur (" p v p ist allgemeingültig" bzw. "entweder 0 oder 1 trifft zu") in der Mathematik für den jeweiligen Standpunkt eine *conditio sine qua non*. Um diesen fundamentalen Unterschied semiotisch zu untersuchen, gehe ich aus von zwei undefinierten Zeichen 0, 1, die zunächst weder bezüglich ihres Objektbereichs noch ihres Interpretantenbereichs spezifiziert sein sollen, jedoch im Mittelbereich als Legizeichen fungieren, gemäß der häufig anzutreffenden Konvention, daß 0 das Nicht-Zutreffen einer abstrakten unbestimmten Eigenschaft auf ein noch näher zu beschreibendes Objekt und 1 das Zutreffen dieser Eigenschaft auf eben dieses Objekt bezeichnen soll. Sowohl für Intuitionisten als auch für Formalisten sind die interessierenden Objekte sicher mathematischer Natur.

In intuitionistischer Sicht heißt das aber, daß die von Brouwer eingeführten mathematischen Entitäten vom menschlichen Intellekt abhängig sind, z. B. sind Beweise mentale Akte. Das bedeutet für die semiotische Analyse: Der zu den Legizeichen 0 bzw. 1 gehörige Objektbereich kann nicht ikonisch bezeichnet werden, weil abstrakte Denkvorgänge als solche nicht ikonisch wiedergegeben werden können, da sie in ihrem raum-zeitlichen Aufbau (noch) nicht erkannt werden können. (Das hat auch Hilbert mit seiner Methode der Visualisierung formaler Ableitungen durch Beweisbäume respektiert, in denen nämlich *Regeln* ikonisch repräsentiert sind, nicht Gedankengänge bzw. Gedankenexperimente wie Hilbert sie nannte. Folglich kann der Bezug von 0 (1) zu dem entsprechenden Objektbereich nur indexikalisch oder symbolisch sein.

Der symbolische Bezug scheidet aus, da ja raum-zeitlich gebundene Vorgänge im Intellekt für die Funktion von 0 (1) entscheidend sind, und damit die "Symbol-Bedingung", d. h. die völlige Unabhängigkeit eines Zeichen(mittel)s von seinem Objektbereich nicht erfüllt ist. Folglich bezeichnen 0 (1) ihren Objektbereich *indexikalisch*. Das ist jedoch nicht nur logisch, sondern auch inhaltlich zu erschließen: Die beiden Legizeichen sind von dem Bereich der "Gedankengänge" abhängig, derart, daß zu jeder Zuordnung von 0 (1) zu einer mathematischen Entität mindestens ein Gedankengang existiert, der sie bewirkt.

Nach entsprechender Bezeichnung von Gedankengängen läßt sich die "Index-Bedingung" $L(S(\mathfrak{M})) \subseteq L(S(\mathcal{O}))$ aus [9] erfüllen. Das hat die Indexikalität des intuitionistisch aufgefaßten Tertium non datur zur Folge.

Da aufgrund der genannten Abhängigkeit die Funktion von 0 (1) im Interpretantenbereich nur als "offen", im Sinne des "offenen" Ergebnisses der Zuordnung von Eigenschaften zu mathematischen Entitäten durch die Wissenschaft(ler) bezeichnet werden kann, - Brouwer spricht von "fliehenden Eigenschaften" - haben wir es mit einer rhematischen Verwendung von 0 (1) im Interpretantenbereich zu tun. 0 (1) darf dementsprechend natürlich nicht auf unendliche Entitäten, wie "Matrizen" angewandt werden, da aufgrund der Abhängigkeit dieser Zuordnung vom endlichen Intellekt in einem solchen Fall nicht entschieden werden kann, ob 0 oder 1 zutrifft.

Das Prinzip des Tertium non datur wird also von den Intuitionisten als rhematisch-indexikalisches Legizeichen benutzt, d. h. als ein Element der 6. Zeichenklasse K_6. -

Wie verwendet nun der Formalist das Tertium non datur?

Auch bei ihm scheidet eine ikonische Verwendungsweise von 0 (1) im Objektbereich aus den oben an entsprechender Stelle genannten Gründen aus. Die Abhängigkeit des (mathematischen) Objektbereichs von irgendeinem anderen wissenschaftlichen oder außerwissenschaftlichen Gebiet erscheint ihm undenkbar; ausgenommen sind nicht einmal die (in)direkten Einflüsse aus den Anwendungen, z. B. der Physik, für die sich jedoch die formalistische Mathematik nicht zuständig erklärt (etwa Bourbaki). Das bedeutet, daß eine indexikalische Funktion von 0 (1) ausscheidet und somit logisch nur eine *symbolische* Verwendung übrigbleibt. Doch auch hier läßt sich der symbolische Gebrauch inhaltlich rechtfertigen: Da die Gegenstände der formalistischen Mathematik im wesentlichen Mengen sind (diese Mengen lassen sich ja nach Zermelo aus einem einzigen Symbol $\emptyset$ (für die leere Menge) erzeugen) und abzählbar-unendliche Gesamtheiten wie die natürlichen Zahlen wieder zu Mengen zusammengefaßt werden dürfen, darf man konsequenterweise auch jedem Element einer unendlichen Menge genau eine der "Eigenschaften" 0 bzw. 1 zuschreiben, weil das ja bei endlichen Mengen möglich ist.

(Man vergleiche dagegen den Standpunkt der Ultra-Intuitionisten van Dantzig und Jessenin-Volpin, für die $10^{10^{10}}$ keine endliche Zahl ist.)

Weiterhin ergibt sich aus dieser Haltung in der formalistischen Mathematik ein eindeutig bestimmter Gebrauch von 0 (1) im Interpretantenbereich: Weil auf jedes Element jeder Menge genau eine der abstrakten Eigenschaften 0 bzw. 1 zutrifft, es aber gleichgültig ist, ob man durch endlich viele geistige Akte bzw. die entsprechenden Konstruktionen zu 0 oder 1 gelangt, wie es der Intuitionismus fordert, ist jedes Zeichen der formalistischen Mathematik, das ja als Zeichen für Mengen gedeutet werden kann, der Behauptung fähig, daß darauf die eine "Eigenschaft" 0 bzw. 1 zutrifft.

Das Tertium non datur wird somit *dicentisch* gebraucht. Resultat: In der formalistischen Mathematik wird das Tertium non datur als ein (informales) Element der 9. Zeichenklasse verwendet, die aus dicentisch-symbolischen Legizeichen besteht.

Der Unterschied zwischen Intuitionismus und Formalismus beruht also im wesentlichen auf einer unterschiedlichen Zuordnung des Tertium non datur zu bestimmten Zeichenklassen: Der Intuitionist handhabt dieses Prinzip im Sinne von K_6, der Formalist im Sinne von K_9.

Zitierte Literatur in der Reihenfolge der Zitate

[1] Schmidt, J.: Mengenlehre I, Mannheim 1966

[2] Kreisel, G.: Modelltheorie, Berlin-Heidelberg-New York 1972

[3] Kreisel, G.: Informal rigour and completeness proofs, in: Problems in the philosophy of mathematics, Lakatos, J. (ed.), Amsterdam 1966

[3a] Hilbert, D./Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik I^2*, Berlin-Heidelberg-New York 1968*

[4] Peirce, C. S.: Die Grundlagen der Mathematik (On the found. of math. Ms. Nr. 7, Edition rot 52, Stuttgart 1972

[5] Peirce, C. S./Walther, E. (ed.): Vorlesungen über Pragmatismus/Lectures on pragmatism, Hamburg 1973

[6] Brouwer, L. E. J.: Intuitionism and formalism, in: Collected works I, A. Heyting (ed.), Amsterdam 1975

[7] Brouwer, L. E. J.: Die möglichen Mächtigkeiten, in: Collected works I

[8] Brouwer, L. E. J.: Zur Begründung der intuionistischen Mathematik I, in: Collected works I

[9] Beckmann, P.: Definierende Eigenschaften für Zeichenklassen, in: Semiosis 14, 1979

[10] Bense, M.: Zeichenklassen und mathematische Grundbegriffe, in: Semiosis 11, 1978

SEMIOSIS 17/18

5. Jahrgang, Heft 1/2, 1980

INHALT