

FREGES DREISTELLIGE ZEICHENRELATION

Während in der bisherigen Literatur zu Freges Arbeiten im Bereich von Sprachphilosophie und Logik hinreichend auf die darin vorkommende saubere Trennung von Objektbezug eines Zeichens (Extension, bei Frege "Bedeutung" genannt) und Bedeutung oder Interpretantenbezug (Intension, "Sinn" bei Frege) hingewiesen wurde, fehlte meist der Hinweis auf das, was man als Repertoire, den semiotischen Mittelbezug, bezeichnet (vgl. Walther, 1979, 92). Zu zeigen, daß Frege diese Relation nicht etwa vergessen hat, sondern auch darauf größten Wert legte, ist Ziel dieser Arbeit.

Frege gilt als Begründer des Logizismus, dessen Ziel es ist, die Arithmetik aus den formalen Lehrsätzen der Logik abzuleiten, worauf ich im folgenden noch zurückkommen werde. Weil zur damaligen Zeit noch keine mit dem heutigen Stand der Forschung vergleichbare formale Sprache der Logik existierte, blieb ihm nichts anderes übrig, als sich an deren Aufbau zu machen. Seine zweidimensionale Begriffsschrift, wie sie exakt in *Grundgesetze der Arithmetik* (1893) entwickelt wurde, stellt eine (damals leider nur von wenigen) wahrgenommene Revolution der logischen Forschung dar (vgl. Patzig). Der Weg dazu führte ihn über eine Untersuchung der natürlichen Sprache und den Versuch, ihre Unzulänglichkeiten durch methodologische Gegenmittel zu vermeiden (Dummett, 47ff). Ich zitiere dazu Bense (1981, 20), wobei das von der Mathematik gesagte teilweise auch für die formale Sprache der Logik gilt:

Im Gegensatz zu den triadischen Zeichenmitteln der Semiotik sind die linguistischen Mittel der natürlichen Sprachen nicht universal, nicht fundamental und auch nicht kategorial, sondern regional zufällige Ereignisse unserer Geschichte und gebunden an diese. Nur die Mathematik, also das System der mathematischen Theorien, Begriffe und Operationen, hat die universalen, fundamentalen und kategorialen Zustände der Abstraktion erreicht, wie sie die semiotischen Theorien heute isoliert betrachten, beschreiben, wissenschaftlich konstituiert anwenden kann.

Im Zentrum von Freges Untersuchungen steht der "Begriff", den er als besonderen Fall des in der Mathematik schon lange eingeführten Konzepts der "Funktion" definiert. Der Wertevorrat (Frege nennt den Graph einer Funktion Werteverlauf) dieser speziellen Funktion entspricht genau der Menge, die bei Frege "das Wahre" und "das Falsche" enthält. Er erhält dadurch also das, was in der neueren formalen Logik unter einer "Aussagenform" verstanden wird (vgl. Frege, 1975, 20ff). In seiner Untersuchung der natürlichen Sprache (vgl. Frege, 1966) isoliert er eine Struktur, die er, ausgehend von dem vorher definierten Begriff des "Gedankens",

ein "Gedankengefüge" nennt. In seinem Bemühen, die Schwächen der natürlichen Sprache zu eliminieren, entwickelte er seine Begriffsschrift, deren präzise Struktur er mit einer klassischen zweiwertigen (wahr/falsch) Semantik interpretieren konnte. Dabei ist der Wahrheitswert eines zusammengesetzten Ausdrucks eine Funktion der Elementarsätze. Seine Vorgehensweise, in welcher er die oben angeführten metasprachlichen Begriffe "Bedeutung" für den Objektbezug und "Sinn" für den Interpretantenbezug entwickelt, soll hier übergangen werden (vgl. Dummett, 53ff, Eley, 209ff, Frege, 1975, 1966). Wesentlich ist, daß er sich aufgrund seiner Recherchen darüber im klaren ist, daß sprachliche Ausdrücke, ob logisch oder nicht-logisch, einen gesetzmäßigen Charakter zeigen, also in unserer Terminologie als Legizeichen gelten. So diskutiert er am Anfang von *Grundgesetze der Arithmetik* (1893), was er unter Ausdrücken versteht, die er in Anführungszeichen setzt, sowie den Unterschied zwischen dem Gebrauch von "bezeichnen" und "bedeuten" (1893, 7). Das deckt sich mit der semiotischen Zuordnung des Natürlich-sprachlichen zur trichotomischen Triade

Zkl	3.1	2.1	1.1	x	1.1	1.2	1.3	M-them. M
Zkl	3.1	2.1	1.2	x	2.1	1.2	1.3	M-them. O
Zkl	3.1	2.1	1.3	x	3.1	1.2	1.3	M-them. I

bzw. im Falle der Logik

Zkl	3.1	2.3	1.3	x	3.1	3.2	1.3	I-them. M
Zkl	3.2	2.3	1.3	x	3.1	3.2	2.3	I-them. O
Zkl	3.3	2.3	1.3	x	3.1	3.2	3.3	I-them. I

(vgl. Walther, 1979, 52 bzw. 1985).

Heutzutage zeigt sich bei der Programmierung elektronischer Rechenanlagen eine wichtige Anwendung solcher Unterscheidungen. Maschinennahe Programmiersysteme wie Assemblersprachen, C oder Pascal, unterstützen Datenstrukturen, die man "Zeiger" (Pointer) nennt. Diese Zeigervariablen haben als Inhalt ihrer Speicherzellen die Adresse anderer Variablen, welche natürlich ebenfalls wieder Zeiger sein können. Eine unzureichende Unterscheidung des Mittel-, Objekt- oder Interpretantenbezugs kann dabei zu schwerwiegenden Programmfehlern und Systemabstürzen führen, einer im Vergleich zur oftmals wenig praxisnahen Diskussion linguistischer Bedeutungstheorien sehr realistischen Erfahrung.

Zum Schluß soll noch, quasi als Anwendung, Freges Ziel, seine Ableitung des Zahlbegriffs, diskutiert werden. Neben seiner Kritik am Logizismus stellt Bense (1979, 24) fest:

Frege und Russell insbesondere wiesen darauf hin, daß der Begriff der Kardinalzahl an den Begriff der Äquivalenz von Mengen gebunden sei, derart, daß eine Kardinalzahl eine Äquivalenzklasse darstelle,

wobei der Begriff der Äquivalenz ein repräsentationstheoretisch-semiotischer, kein logischer, Begriff sei.

Freges in *Grundgesetze der Arithmetik* ausgearbeiteter Plan wird in *Die Grundlagen der Arithmetik* skizziert und diskutiert. Seine dortige scharfe Trennung von Eigenschaften [Ikone], die Dinge (also auch Begriffe) haben können, und Merkmalen [Indices], die den Umfang von Begriffen bestimmen, ermöglicht es ihm, Zahlen als weder physikalische noch subjektive Objekte zu konstituieren (siehe dazu Frege, 1884, § 52ff) und die Zahlenreihe zu charakterisieren, anders als z.B. Peano, dessen Axiome sehr viel allgemeinere Modelle zulassen, wenn sie nur unter den viel allgemeineren Begriff der Progression fallen (vgl. Waismann, 98).

Wie in meinem Aufsatz (1985) angedeutet, erfolgt die Ableitung der Kardinalzahlen deduktiv. Bei Frege steht dabei der Begriff im Mittelpunkt, dessen Zeichenklasse ist:

Zkl (Begriff): 3.1 2.3 1.3 x Rth 3.1 3.2 1.3 I-them. M

Frege (1884, § 57) schreibt nun, daß er es vermieden habe, eine Zahl wie 0, 1, 2 Eigenschaft eines Begriffes zu nennen (mit der Konsequenz, daß deren Zeichenklasse die einer Eigenschaft, also die des Begriffs, wäre). Er geht den Weg über die Äquivalenzrelation der Gleichzähligkeit, nachdem er in *Die Grundlagen der Arithmetik* (§§ 74-77) die Existenz der Zahlen 0 und 1 erweist. Die natürliche Zahlenreihe wird sodann als Beziehung (Relation) über Begriffen eingeführt, deren Relate aufeinander verweisen, also als Index im Objektbezug:

Zkl (Zahl): 3.1 2.2 1.3 x Rth 3.1 2.2 1.3 M-O-them. I.

Die von Frege angestrebte Gesetzmäßigkeit wird durch das Legizeichen im Mittelbezug ausgedrückt.

Nach Waismann (S.86) weist Frege damit den analytischen Charakter der arithmetischen Gesetze auf, sie sind also ein Teil der Logik. Darauf aufbauend, läßt sich der Unterschied zwischen (natürlichen) Sprachen und Theorien ableiten, der sich bei einigen späteren Untersuchungen auf diesem Gebiet (z.B. Quine, 1976, 33ff) nicht mehr aufrechterhalten läßt. Interessant ist dazu die Ansicht von Peirce (1885, in: Berka/Kreiser, 1983, 31), der den Reichtum und die endlose Reihe von überraschenden Entdeckungen einer apodiktischen und deduktiven Wissenschaft wie der Mathematik damit begründet, daß selbst jeder deduktive Schluß aufgrund seines iconischen Charakters ein Element der Beobachtung enthält. "Das sind Modelle, die wir bei unserem Verfahren nachahmen dürfen, sie sind die Icone par excellence der Algebra". Die Buchstaben der Algebra betrachtet er nicht nur als gewöhnliche Symbole, sondern als Leerstellen, Anzeiger von Symbolen.

Frege rechtfertigt die Existenz einer unendlichen Gesamtheit, wobei deren Problematik dadurch verschwinden soll, daß alle Axiome aus den Lehrsätzen der formalen Logik abgeleitet werden (Stegmüller, 1978, 436f). Leider enthielt Freges begriffsrealistisches System (wie z.B. Bertrand Russell entdeckt hat) die klassischen mengentheoretischen Antinomien, die dann Russells in der *Principia Mathematica* ausgearbeitete Typentheorie nur um den Preis der Einführung höchst bedenklicher

Zusatzmaßnahmen (z.B. eines Unendlichkeitsaxioms) vermeiden konnte. Wie schon aus dem obigen Zitat von Max Bense hervorgeht, muß man damit das logizistische Konzept zur Rekonstruktion der Arithmetik als gescheitert ansehen (vgl. Schäfer, 1974, 1782).

LITERATUR

- Bense, Max: *Axiomatik und Semiotik*. Baden-Baden 1981
- Bense, Max: *Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen*. Baden-Baden 1979
- Dummett, M.: *Wahrheit*. Stuttgart 1982
- Eley, L.: *Philosophie der Logik*. Darmstadt 1985
- Frege, G.: *Funktion, Begriff, Bedeutung*. Göttingen 1975
- Frege, G.: *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau 1884. Zitiert nach: Reclam, Stuttgart 1987
- Frege, G.: *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. I. Jena 1893. Nachdruck: Olms, Hildesheim 1966
- Frege, G.: *Logische Untersuchungen*. Göttingen 1966
- Patzig, G.: *Tatsachen, Normen, Sätze*. Stuttgart 1980
- Peirce, Ch. S.: *On the algebra of logic*. In: K. Berka/L. Kreiser: *Logik-Texte*. Darmstadt 1983
- Quine, W.v.O.: *Word and Object*. Cambridge 1976. Zitiert nach: *Wort und Gegenstand*. Stuttgart 1980
- Schäfer, L.: *Zahl*. In: H. Krings/H.M. Baumgartner/Ch. Wild (Hrsg.): *Handbuch der philosophischen Grundbegriffe*, Bd. 6. München 1974
- Sigle, Günther: *Eine semiotische Bemerkung zur axiomatischen und konstruktivistischen Grundlegung der Arithmetik*. In: *Semiosis* 39/40, Heft 3/4, Baden-Baden 1985
- Stegmüller, W.: *Hauptströmungen der Gegenwarts-Philosophie*, Bd. I. Stuttgart 1978
- Waismann, F.: *Einführung in das mathematische Denken*. Wien 1936. Zitiert nach: dtv, München 1970
- Walther, E.: *Allgemeine Zeichenlehre. Einführung in die Grundlagen der Semiotik*. Stuttgart 1979
- Walther, E.: *Semiotik der natürlichen Sprache*. In: *Semiosis* 39/40, Heft 3/4. Baden-Baden 1985

SUMMARY

This essay shows the great importance of the "repertoire" in Frege's triadic sign-relation, often wrongly seen as a dyadic one. In the application, his main intention, i.e. the deduction and constitution of a consistent numerical conception, is discussed.

SEMIOSIS 49

Internationale Zeitschrift
für Semiotik und Ästhetik
13. Jahrgang, Heft 1, 1988

INHALT

Max Bense:	Bericht VII über die "Eigenrealität" des Zeichenbandes im Zusammenhang mit der Realitäts-Relation zwischen Kosmos und Chaos	3
Ynhui Park:	Erkennen und Sein	8
Udo Bayer:	Urgeschichte und Semiotik - Überlegungen zu den Aurignacien-Figuren aus dem Donautal	22
Karl Gfesser:	Die alltägliche Argumentation: Analogien und Iconizität	44
Günther Sigle:	Freges dreistellige Zeichenrelation	52
<i>Joachim Hahn, Kraft und Aggression. Die Botschaft der Eiszeitkunst im Aurignacien Süddeutschlands? (Udo Bayer)</i>		56
Nachrichten		57