Cornelie Leopold

KATEGORIETHEORETISCHE KONZEPTION DER SEMIOTIK

– Im Gedenken an Max Bense –

In dem Aufsatz "Semiotische Kategorien und algebraische Kategorien"[1] hatte Max Bense schon 1976 auf einen Zusammenhang zwischen den multiplikativen Graphen der **algebraischen Kategorietheorie** und den multiplikativen "Bezügen" bzw. Relationen der **semiotischen Kategorietheorie** hingewiesen.

> Was sich damit zeigen soll, ist das m. E. "typische" Grundphänomen, daß mathematische Systeme nur zwischen den semiotischen Kategorien (als den entitätisch-fundierenden) einerseits und den algebraischen Kategorien (als den metatheoretisch-superierenden) andererseits vollständig, d.h. hier abgeschlossen und wechselseitig begründet werden können. Grundsätzlich möchte ich hinzusetzen dürfen, daß jede vollständige Begründung eine wechselseitige ist; keine Begründung ist eine solche, die nur eine "Tieferlegung" theoretischer Entitäten ist, es gehört immer auch eine "Vervollständigung" der deduzierbaren Theoreme auf höherem Niveau dazu.[2]

Um eine metatheoretische Begründung der Semiotik mit Hilfe der algebraischen Kategorietheorie soll es hier gehen. Dabei nehme ich Bezug auf die Ansätze Max Benses sowie Robert Martys in verschiedenen Aufsätzen[3].

In den Jahren 1942-45 entwickelten S. Eilenberg und S. MacLane die Kategorietheorie als neues Teilgebiet der Mathematik. Sie versucht die Struktur mathematischer Systeme allgemein zu erfassen. Dabei geht es nicht mehr nur um mathematische Objekte und deren Beziehungen, sondern Abbildungen (Morphismen), Operationen, Transformationen werden selbst zum betrachteten Gegenstand. Es wurde erkannt, daß sich viele Eigenschaften mathematischer Systeme durch universelle Eigenschaften von Diagrammen darstellen lassen.[4]

Meta-semiotische Theoriebildung verbunden mit logisch-mathematischer Theoriebildung (u.a. Kategorietheorie) liefern die Basis für die Theoretische Semiotik. Mit Hilfe der Kategorietheorie kann das Zeichenklassensystem aus den drei Fundamentalkategorien:

$$\cdot 1 \cdot, \cdot 2 \cdot, \cdot 3 \cdot$$

1 Max Bense: Semiotische Kategorien und algebraische Kategorien. Zur Grundlagentheorie der Mathematik. In: Semiosis 4 (1976) 5ff.
2 Ebd., 6f.
3 Max Bense: Das System der Theoretischen Semiotik. In: Semiosis 1 (1976) 24-28; Robert Marty: Catégories et foncteurs en sémiotique. In: Semiosis 6 (1977) 5-16; Robert Marty: L'analyse sémiotique des hypersignes. In: Langages 58 (1980); Robert Marty: Une formalisation de la sémiotique de C. S. Peirce à l'aide de la théorie des catégories. In: Ars semiotica II, 3 (1979) 275-294.
4 Vgl. S. MacLane: *Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie.* 1972, 1ff.

und den grundlegenden Semiosen aufgebaut werden.
Philosophischer und mathematischer Kategoriebegriff dürfen dabei nicht verwechselt werden, obwohl der mathematische Begriff "Kategorie" dem philosophischen entlehnt ist.[5]

Als die grundlegenden Semiosen der Zeichenbildung können nach R. Marty[6] die Morphismen α und β eingeführt werden:

$$1 \underset{\alpha}{\rightarrow} 2 \underset{\beta}{\rightarrow} 3$$

α Übergang von 1 zu 2 – Realisation
β Übergang von 2 zu 3 – Formalisation

Die Morphismen α und β kennzeichnen generative Semiosen. Führt man ihre Umkehrungen als α° und β° ein, so kennzeichnen diese die entsprechenden degenerativen Semiosen. Die Semiosen sind also insgesamt bestimmt durch vier Morphismen[7]:

$\alpha : 1 \rightarrow 2$ Realisation	$\beta : 2 \rightarrow 3$ Formalisation bzw. Generalisation
$\alpha^{\circ} : 2 \rightarrow 1$ Involution	$\beta^{\circ} : 3 \rightarrow 2$ Replikation

Der α-Morphismus leitet den Übergang von der Möglichkeit zur singulären Wirklichkeit (→ Realisation), während der Morphismus α° der Involution von der Wirklichkeit zur Möglichkeit zurückführt, das Wirkliche involviert stets das Mögliche. Der β-Morphismus kennzeichnet den Prozeß der Formalisation oder Generalisation, den Übergang von der Wirklichkeit zur Notwendigkeit, der β°-Morphismus den der Replikation, die Rückführung der Notwendigkeit auf die Wirklichkeit, d.h. eine Singularität dient als Beleg für eine Allgemeinheit. Peirce hatte den Begriff "Replica" eingeführt, um die Realisation des Legizeichens zu bezeichnen. "Replica" bedeutet "Beispiel", "Kopie", "Beleg", "Abbild".[8]

Semiotisch-fundamentale Kategorie

Aus diesen Semiosen kann nun das System der Theoretischen Semiotik kategorietheoretisch aufgebaut werden.
Die semiotisch-fundamentale Kategorie $\underline{S}$ besteht aus:

5 Vgl. S. MacLane: *Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie.* 1972, 31.
6 Robert Marty: Catégories et foncteurs en sémiotique. In: Semiosis 6 (1977) 5–16.
7 Vgl. Josef Klein: Vom Adel des Gesetzes – zu einer Semiotik der Norm. In: Semiosis 33 (1984) 44.
8 Vgl. Elisabeth Walther: *Allgemeine Zeichenlehre.* 1979, 88.

1) der Klasse $|\underline{S}|$ von Objekten: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ (Erstheit, Zweitheit, Drittheit);

2) einer Klasse paarweise disjunkter Mengen $[A,B]_{\underline{S}}$ zu jedem $(A,B) \in |\underline{S}| \times |\underline{S}|$.
Die Elemente von $[A,B]_{\underline{S}}$ heißen **Morphismen** von A nach B.
Diese Morphismen sind bestimmt durch die lineare Ordnung der Primzeichen

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3.$$

Die Morphismen sind:

$1 \rightarrow 1$ $\quad id_1$
$2 \rightarrow 2$ $\quad id_2$
$3 \rightarrow 3$ $\quad id_3$
$1 \rightarrow 2$ $\quad \alpha$
$2 \rightarrow 3$ $\quad \beta$
$1 \rightarrow 3$ $\quad \beta\alpha$

3) einer Komposition von Morphismen
$[A,B]_{\underline{S}} \times [B,C]_{\underline{S}} \rightarrow [A,C]_{\underline{S}}$ zu jedem Tripel (A,B,C) von Objekten,
d.h. $(\alpha, \beta) \rightarrow \beta\alpha$
Dabei muß die Assoziativität erfüllt sein und für jedes Objekt ein identischer Morphismus existieren (id_1, id_2, id_3).

Die semiotisch-fundamentale Kategorie kann als **vorgeordnete Klasse** bezeichnet werden, da alle Mengen $[A,B]$ höchstens ein Element enthalten. Dies kann auch durch $A \leq B$ für $[A,B] \neq \emptyset$ ausgedrückt werden.[9] Damit wird der Zusammenhang zwischen relationaler und kategorietheoretischer Konzeption deutlich.

Jeder Kategorie $\underline{C}$ kann eine **duale Kategorie** $\underline{C}^o$ zugeordnet werden:
Die Objekte von $\underline{C}^o$ sind diejenigen von $\underline{C}$, es ist $[B,A]_{\underline{C}^o} = [A,B]_{\underline{C}}$, und die Komposition fg in $\underline{C}^o$ ist definiert als gf in $\underline{C}$, d.h. die Umkehrung der Pfeile.[10]
Die degenerativen Semiosen

$$\alpha^o : 2 \rightarrow 1$$
$$\beta^o : 3 \rightarrow 2$$

sind die zu α und β dualen Morphismen.

Die zur semiotisch-fundamentalen Kategorie

$$\underline{S}: 1 \xrightarrow[\alpha]{} 2 \xrightarrow[\beta]{} 3$$

9 Vgl. H. Schubert. *Kategorien I*. 1970, 4.
10 Vgl. H. Schubert. *Kategorien I*. 1970, 8.

duale Kategorie ist:

$$\underline{S}^{\circ}: 3 \xrightarrow{\beta^{\circ}} 2 \xrightarrow{\alpha^{\circ}} 1.$$

Die durch die "Kleine Matrix" in die Semiotik eingeführten Subzeichen können als die Morphismen der Kategorie $\underline{S}$ und $\underline{S}^{\circ}$ betrachtet werden.

S° \ S	1	2	3
1	$1 \to 1$	$1 \to 2$	$1 \to 3$
2	$2 \to 1$	$2 \to 2$	$2 \to 3$
3	$3 \to 1$	$3 \to 2$	$3 \to 3$

Die Diagonale teilt die Subzeichen in die der Kategorie $\underline{S}$ und der Kategorie $\underline{S}^{\circ}$. Die identischen Morphismen, d.h. die Subzeichen 1.1, 2.2, 3.3, die in der Diagonale stehen, gehören sowohl der Kategorie $\underline{S}$ als auch der Kategorie $\underline{S}^{\circ}$ an.
Die "Kleine Matrix" kann nun auch die Morphismen der Kategorie $\underline{S}$ und $\underline{S}^{\circ}$ aufzeigen:

S° \ S	1	2	3
1	id_1	α	$\beta\alpha$
2	α°	id_2	β
3	$\alpha^{\circ}\beta^{\circ}$	β°	id_3

Die "Kleine Matrix" bildet also auch das grundlegende Schema aller Semiosen.

Die Kategorie der Zeichenklassen

R. Marty[11] führt auf der Basis dieser Morphismen die Kategorie der Zeichenklassen als die **Diagrammkategorie [$\underline{S}$, $\underline{S}^{\circ}$]** ein.
Nach Bense wird bei der Zeichenklassenbildung mit dem Interpretanten begonnen, da die Einführung eines Zeichens vom "Drittheitlichen" her erfolgen muß. Daher muß entsprechend dieser Reihenfolge die Kategorie der Zeichenklassen als die **Diagrammkategorie [$\underline{S}^{\circ}$, $\underline{S}$]** eingeführt werden.

Die Objekte einer Diagrammkategorie, in der Literatur auch **Funktorkategorie** genannt, sind die **kovarianten Funktoren**, und die Morphismen sind die **natürlichen Transformationen** der Funktoren.

11 Robert Marty: Catégories et foncteurs en sémiotique. In: Semiosis 6 (1977) 8.

Definition: Es seien $\underline{C}$ und $\underline{D}$ Kategorien. Ein **kovarianter Funktor** $T: \underline{C} \rightarrow \underline{D}$ ist eine Abbildung für Objekte und Morphismen:
Jedem Objekt $A \in |\underline{C}|$ ist ein Objekt $T(A) \in |\underline{D}|$, jedem Morphismus $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus $T(f): T(A) \rightarrow T(B)$ so zugeordnet, daß stets gilt:

(1) $T(1_A) = 1_{T(A)}$

(2) $T(gf) = T(g)T(f)$, wenn gf in $\underline{C}$ erklärt ist.[12]

Ein Funktor ist also eine strukturerhaltende Abbildung, Identitäten und die Komposition von Morphismen werden respektiert.
Eine natürliche Transformation der Funktoren ist folgendermaßen definiert:

Definition: Es seien $S, T: \underline{C} \rightarrow \underline{D}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\eta: S \rightarrow T$ ordnet jedem Objekt $A \in |\underline{C}|$ einen Morphismus $\eta_A: S(A) \rightarrow T(A)$ in $\underline{D}$ zu und zwar so, daß für jeden Morphismus $f: A \rightarrow B$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\
S(B) \arrow[r, "\eta_B"] & T(B)
\end{tikzcd}$$

also $T(f)\,\eta_A = \eta_B\,S(f)$ für $f: A \rightarrow B$ beliebig in $\underline{C}$.[13]

Die Funktorkategorie (Diagrammkategorie) $[\underline{C}, \underline{D}]$ ist die Kategorie mit den Funktoren $\underline{C} \rightarrow \underline{D}$ als Objekte und ihren natürlichen Transformationen als Morphismen.
Werden diese Definitionen nun auf die Funktorkategorie $[\underline{S}^{o}, \underline{S}]$ angewandt, so erhält man:
Die Objekte der Funktorkategorie $[\underline{S}^{o}, \underline{S}]$ sind die Funktoren

$D: S^{o} \rightarrow S$,

welche die **Zeichenklassen** sind.
Die Morphismen der Funktorkategorie $[\underline{S}^{o}, \underline{S}]$ sind die natürlichen Transformationen dieser Funktoren. Diese kennzeichnen die Übergänge (Semiosen) zwischen den Zeichenklassen.

Die Gültigkeit des Diagramms in der Definition der natürlichen Transformationen soll am Beispiel zweier Zeichenklassen aufgezeigt werden:
Ausgangspunkt ist ein Objekt $A \in |\underline{S}^{o}|$, z.B. $3 \in |\underline{S}^{o}|$ und ein Morphismus $f: A \rightarrow B$, z.B. $\beta^{o}: 3 \rightarrow 2$. Die natürliche Transformation $\eta: D \rightarrow E$ ordnet nun jedem $A \in |\underline{S}^{o}|$ einen Morphismus $\eta_A: D(A) \rightarrow E(A)$ in $\underline{S}$ zu, so daß gilt:

12 H. Schubert. *Kategorien I*. 1970, 5.
13 H. Schubert. *Kategorien I*. 1970, 12.

$$\begin{tikzcd}
D(3) \arrow[r, "\eta_3"'] \arrow[d, "D(\beta^\circ)"'] & E(3) \arrow[d, "E(\beta^\circ)"] \\
D(2) \arrow[r, "\eta_2"'] \arrow[d, "D(\alpha^\circ)"'] & E(2) \arrow[d, "E(\alpha^\circ)"] \\
D(1) \arrow[r, "\eta_1"'] & E(1)
\end{tikzcd}$$

Zeichenklasse | Zeichenklasse

natürliche
Transformation

Eine natürliche Transformation zwischen zwei Zeichenklassen besteht also aus einem Tripel von Morphismen (η_3, η_2, η_1), wobei der Index von η sich jeweils auf das Ausgangsobjekt aus S° bezieht. Damit wird deutlich, daß die Grundlage der natürlichen Transformation, d.h. der Semiosen zwischen den Zeichenklassen, die zeicheninternen degenerativen Semiosen

$$3 \underset{\beta^\circ}{\rightarrow} 2 \underset{\alpha^\circ}{\rightarrow} 1.$$

sind.

Das System der Funktoren

$$D(3) \xrightarrow{D(\beta^\circ)} D(2) \xrightarrow{D(\alpha^\circ)} D(1)$$

beschreibt die zehn Zeichenklassen:

	D(3)	$\xrightarrow{D(\beta^\circ)}$	D(2)	$\xrightarrow{D(\alpha^\circ)}$	D(1)	Zeichenklassen
1)	1	id_1	1	id_1	1	3.1 2.1 1.1
2)	1	id_1	1	α	2	3.1 2.1 1.2
3)	1	id_1	1	$\beta\alpha$	3	3.1 2.1 1.3
4)	1	α	2	id_2	2	3.1 2.2 1.2
5)	1	α	2	β	3	3.1 2.2 1.3
6)	1	$\beta\alpha$	3	id_3	3	3.1 2.3 1.3
7)	2	id_2	2	id_2	2	3.2 2.2 1.2
8)	2	id_2	2	β	3	3.2 2.2 1.3
9)	2	β	3	id_3	3	3.2 2.3 1.3
10)	3	id_3	3	id_3	3	3.3 2.3 1.3

Diese Tabelle entspricht der von R. Marty[14] entwickelten Tabelle für die "catégorie Dgram (S,S^o)".
Mit diesem Aufbau der Zeichenklassen wird die verlangte Wohlordnung bei der Zeichenklassenbildung begründbar. Da die Funktoren D: $\underline{S}^o \rightarrow \underline{S}$ Morphismen von $\underline{S}^o$ auf Morphismen von $\underline{S}$ abbilden, können, die Bilder von α^o und β^o nur sein:

$$\alpha, \beta, \beta\alpha, id_1, id_2, id_3.$$

Die Zeichenklassenbildung innerhalb der Subzeichen basiert also auf den grundlegenden generativen Semiosen:

$$1 \xrightarrow[\alpha]{} 2 \xrightarrow[\beta]{} 3.$$

Betrachtet man unter diesem Aspekt die obige Tabelle noch einmal, so fällt die 5. Zeichenklasse 3.1 2.2 1.3 auf. Sie wird bestimmt durch die beiden Morphismen α und β, während alle anderen Zeichenklassen Identitäten enthalten. Als die Zeichenklasse des "Zeichens als solchem" ist sie bestimmt durch die zeichenbildenden Semiosen α und β, d.h. durch Realisation und Formalisation.

Die natürlichen Transformationen, d.h. die Semiosen zwischen den Zeichenklassen können mit Hilfe der Tripel von Morphismen (η_3, η_2, η_1) aufgezeigt werden.[15] Mit Hilfe dieser natürlichen Transformationen können Übergänge zwischen Zeichenklassen beschrieben werden. Für die natürlichen Transformationen gilt die Morphismenkomposition, wie sie für eine Kategorie gefordert wird. So gilt z.B.:

$$(id_1, id_2, \beta)\,(id_1, \alpha, id_2) = (id_1, \alpha, \beta)$$

Mit R. Marty kann definiert werden:

> ...deux classes de signes sont en relation s'il existe un chemin dans le treillis permettant de les joindre.[16]

Der Zusammenhang zweier Zeichenklassen kann also durch Morphismenkompositionen beschrieben werden.

14 Robert Marty: Catégories et foncteurs en sémiotique. In: Semiosis 6 (1977) 8.
15 Vgl. Cornelie Leopold: Anmerkungen zum Dualitätsprinzip in Geometrie und Semiotik. In: Semiosis 55/56 (1989) 11.
16 Robert Marty: L'analyse sémiotique des hypersignes. In: Langages 58 (1980) 41.

BEZEICHNUNGEN

$\emptyset$	leere Menge
$\ldots \in \ldots$	... ist Element von ...
$\ldots \times \ldots$	kartesisches Produkt
$\alpha, \beta, \ldots$	Morphismus
$\alpha^{\circ}, \beta^{\circ}, \ldots$	dualer Morphismus
$[A,B]_{\underline{S}}, \ldots$	Klasse der Morphismen von A nach B, mit $(A,B) \in \mid \underline{S} \mid \times \mid \underline{S} \mid$ ($\underline{S}$ ist dabei die zugrundeliegende Kategorie)
$id_1, id_2, id_3, \ldots$	Identität
$\underline{S}, \underline{C}, \underline{D}, \ldots$	Kategorie
$\underline{S}^{\circ}, \underline{C}^{\circ}, \underline{D}^{\circ}, \ldots$	duale Kategorie
$\mid \underline{S} \mid, \ldots$	Klasse ($\mid \quad \mid$ Betrag von ...)
S, T, D, E, ...	Funktor
$\eta_A, \eta_B, \ldots$	natürliche Transformation

SUMMARY

With the aid of the algebraic theory of categories, the system of Theoretical Semiotics can be built up from the three fundamental categories $\cdot 1 \cdot, \cdot 2 \cdot, \cdot 3 \cdot$ and the fundamental semioses α and β. The rudiments for this, elaborated by Max Bense and Roberty Marty, are explained, amended and modified. It becomes clear that the **semiotic-fundamental category $\underline{S}$** forms the basis of Theoretical Semiotics, and that on this footing the **category of the sign-classes** can be introduced as **diagram category (functor category) $[\underline{S}^{\circ}, \underline{S}]$**.

SEMIOSIS 57/58

Internationale Zeitschrift
für Semiotik und Ästhetik
15. Jahrgang, Heft 1/2, 1990

INHALT