Jorge Bogarin

SYMPLEROSIS: ÜBER KOMPLEMENTÄRE ZEICHEN UND REALITÄTEN

Die abstrakte Semiotik hat sich in den letzten Jahren ständig erweitert. Nichts anderes war von einer "offenen Theorie" (E. Walther) zu erwarten. Klassifikatorisch gesehen, haben sich die drei Fundamentalkategorien, neun Subzeichen und zehn Zeichenklassen (bzw. Realitätsthematiken) weitgehend durchgesetzt. Das reiche Potential, das in der Großen Matrix steckt, wird das ganze noch präziser machen. Was die semiotischen Prozesse, Operationen und Relationen betrifft, ist das Panorama etwas bescheidener: außer der generierenden bzw. degenerierenden Selektion und Zuordnung hat sich nur die Operation der Dualisierung etabliert. Es ist zu wünschen, daß andere vorhandene Operationen und Relationen mehr Aufmerksamkeit finden oder neue eingeführt werden. Der vorliegende Aufsatz will einen kleinen Beitrag in diese Richtung leisten.

Es geht hier darum, die Relation der Komplementarität zwischen Zeichenklassen oder Realitätsthematiken und die entsprechenden Operationen der Komplementbildung zu definieren. Zu diesem Zweck werden Anregungen aus dem Bereich der arithmetischen Komplementen- und der Gruppentheorie aufgenommen. Genaue Anweisungen zur Bestimmung der komplementären Zeichen werden angegeben, wobei unter anderen der Begriff der inversen Kategorie (bzw. des inversen Primzeichens) verwendet wird.

Arithmetisches Komplement: wenn aus mehr weniger wird

Das arithmetische Komplement einer Zahl x ist die Ergänzung $x' = Z-x$ zu $Z = b^k$, wenn x im Zahlensystem zur Basis b dargestellt und der Zahlenbereich $Z = b^k$ betrachtet wird.[1] Im Dezimalsystem ist dieses b-Komplement das Zehnerkomplement.[2]

Komplemente werden in zwei getrennten, aber aufeinander bezogenen Situationen gebraucht. Erstens stellen sie eine bequeme Weise dar, negative Zahlen in Digitalrechnern zu manipulieren. Zweitens können arithmetische Komplemente dazu verwendet werden, Subtraktionen auf

1 Siehe "Zahlendarstellung" in: *Wörterbuch der Kybernetik*. Bd. II, 912 f.

2 Auf die Unterscheidung zwischen dem "radix-minus-one"- und dem "radix"-Komplement gehe ich hier nicht ein (s. Seymour Lipschutz, 14), obwohl sie eine formal bessere Erklärung ermöglicht.

Additionen zurückzuführen.[3] Das alles scheint sehr kompliziert zu sein, ist es aber nicht. Schauen wir uns ein Beispiel im Dezimalsystem an.[4]

Gegeben seien die Dezimalzahlen A = 6381 und B = 4539 mit derselben Anzahl von Ziffern (4). Der betrachtete Zahlenbereich ist $10^4 = 10000$. Das Zehnerkomplement B' von B ist dann 10000 - 4539, das heißt, B' = 5461. Die Differenz C = A - B kann folgendermaßen umschrieben werden:

$$\begin{aligned} C &= A - B + (10000 - 10000) \\ &= A + (10000 - B) - 10000 \\ &= A + B' - 10000 \end{aligned}$$

Die Subtraktion von 10000 eliminiert die führende 1 des Resultates. Es ist also:

$$\begin{array}{lr} A = & 6381 \\ B' = & +\ \underline{5461} \\ & 11842 \\ & -\ \underline{10000} \\ C = & 1842 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lr} A = & 6381 \\ & -\ \underline{4539} \\ C = & 1842 \end{array}$$

Die Addition des Komplementes ist hier zwar länger als die direkte Subtraktion, hat aber für den Computer zwei Vorteile: Erstens werden negative Zahlen normalerweise als Komplemente gespeichert (sie können also direkt addiert werden) und zweitens haben Speicherplätze meistens eine feste Anzahl von "digits", was die automatische Eliminierung der führenden Ziffer des Resultats bewirkt. Das alles soll uns aber keine Sorgen bereiten, wichtig ist nur das "begriffliche Schema", das die Komplementbildung in uns erweckt.

Einige Grundbegriffe der Gruppentheorie

Eine Gruppe ist eine sehr interessante Struktur, die durch verhältnismäßig einfache Axiome bestimmt werden kann. Sie besteht aus einer nicht-leeren, endlichen oder unendlichen Menge von Elementen (der "Trägermenge"), auf der eine zweistellige Operation, die "Multiplikation" genannt wird, definiert ist. Diese Operation oder Verknüpfungsregel, die wir mit "*" bezeichnen werden, muß die folgende Bedingungen erfüllen[5]:

3 Siehe Seymour Lipschutz, *Essential Computer Mathematics,* 14 f.
4 Computer arbeiten intern im Dualsystem; es werden also Einer- bzw. Zweierkomplemente gebraucht.
5 Zum Folgenden siehe Walter Ledermann, *Einführung in die Gruppentheorie*, S. 1 ff.

(1) *Abgeschlossenheit*: Jedem geordneten Paar a, b aus der Gruppe wird ein eindeutig bestimmtes Element c zugeordnet, welches das "Produkt" von a und b genannt wird und selbst wieder Gruppenelement ist. Man schreibt:

$$c = a * b$$

(2) *Assoziativgesetz*: Für drei beliebige Gruppenelemente a, b, c gilt stets:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

(3) *Einselement*: Für die Multiplikation der Gruppenelemente gibt es ein beidseitig neutrales Element e, genannt das Einselement (oder Identität), so daß für jedes Element a gilt:

$$a * e = e * a = a$$

(4) *Inverses Element*: Jedes Element a der Gruppe besitzt ein Inverses a^{-1}, so daß gilt:

$$a * a^{-1} = e$$

Wenn alle Produkte a * b bekannt sind oder sie durch bestimmte Regeln definiert werden können, ist die Gruppe vollständig gegeben. In einer endlichen Gruppe mit n Elementen gibt es n^2 solche Produkte, die in Form einer n X n *Multiplikationstabelle* aufgelistet werden können.

Zum Beispiel:

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Multiplikationstabelle

$a * a = c$
$a * b = b * a = a$
$a * c = c * a = b$
$b * b = b$
$b * c = c * b = c$
$c * c = a$

Regeln

Diese Gruppe heißt *Abelsche* oder *kommutative* Gruppe, weil sie die zusätzliche Eigenschaft besitzt, daß für je zwei Elemente a und b gilt:

$$a * b = b * a$$

Für Abelsche Gruppen wird häufig die additive Schreibweise verwendet, in unserem Fall also "+" statt "*" und (-a) statt $(a)^{-1}$; das Einselement heißt dann "Null-Element". Ich bleibe aber bei der ersten Notation, um falsche Konnotationen zu vermeiden.

Interpretation mit Primzeichen

In der abstrakten Gruppentheorie werden nur formale Eigenschaften berücksichtigt, auf die Natur der Gruppenelemente wird kein Bezug genommen. Ich werde nun die im vorigen Abschnitt angegebene Gruppe mit den semiotischen Primzeichen interpretieren. Es sollen die folgenden Zuordnungen gelten:

$$a \longrightarrow .1.,\ b \longrightarrow .2.\ \text{und}\ c \longrightarrow .3.$$

Die Verknüpfungsregel sieht dann folgendermaßen aus:

*	.1.	.2.	.3.
.1.	.3.	.1.	.2.
.2.	.1.	.2.	.3.
.3.	.2.	.3.	.1.

Multiplikationstabelle der Primzeichen

Es soll zunächst überprüft werden, ob diese Elemente und Produkte die Axiome erfüllen, die eine Gruppe definieren.

Abgeschlossenheit: Aus jeweils zwei Elementen der Gruppe kann ein eindeutig bestimmtes Produkt gebildet werden:

$$\begin{aligned}
.1. * .1. &= .3. \\
.1. * .2. &= .2. * .1. = .1. \\
.1. * .3. &= .3. * .1. = .2. \\
.2. * .2. &= .2. \\
.2. * .3. &= .3. * .2. = .3. \\
.3. * .3. &= .1.
\end{aligned}$$

Assoziativgesetz: Ich führe nur einige Fälle an, der skeptische Leser kann die anderen Möglichkeiten überprüfen:

$$
\begin{aligned}
& .1. * (.2. * .3.) = (.1. * .2.) * .3. \\
\Rightarrow\ & .1. * .3. = .1. * .3. \\
\Rightarrow\ & .2. = .2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& .2. * (.3. * .2.) = (.2. * .3.) * .2. \\
\Rightarrow\ & .2. * .3. = .3. * .2. \\
\Rightarrow\ & .3. = .3.
\end{aligned}
$$

Identität: Das Einselement ist eindeutig .2., denn es gilt:

$$
\begin{aligned}
.1. * .2. &= .2. * .1. = .1. \\
.2. * .2. &= .2. * .2. = .2. \\
.3. * .2. &= .2. * .3. = .3.
\end{aligned}
$$

Jedes Gruppenelement hat außerdem ein Inverses:

$$
\begin{aligned}
.1. * (.1.)^{-1} &= .1. * .3. = .2. \\
.2. * (.2.)^{-1} &= .2. * .2. = .2. \\
.3. * (.3.)^{-1} &= .3. * .1. = .2.
\end{aligned}
$$

Das heißt: $(.1.)^{-1} = .3.$, $(.2.)^{-1} = .2.$ und $(.3.)^{-1} = .1.$

Die auf diese Weise definierten Begriffe und Operationen sollen nun gemeinsam mit der Idee der Komplementbildung auf die Zeichenklassen angewendet werden.

Komplementäre Zeichenklassen

In diesem Abschnitt wird die Relation der *Komplementarität* zwischen Zeichenklassen eingeführt. Sie wird mit $\div$ bezeichnet und erfüllt die folgenden Bedingungen:

(a) Jede Zeichenklasse muß ein Komplement haben; dieses soll eindeutig bestimmt sein.

(b) Das Komplement einer Zeichenklasse muß wiederum eine Zeichenklasse sein.

(c) Die Komplement-Relation soll symmetrisch (aRb $\longrightarrow$ bRa) und darf reflexiv (aRa) sein.

(d) Durch Addition des Repräsentationswertes einer Zeichenklasse zu dem ihres Komplementes soll eine bestimmte Obergrenze erreicht werden.

(e) Die Komplementbildung soll algorithmisch ablaufen, d.h. nach einigen elementaren Operationen, die in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt werden müssen.

Wir definieren unser *komplementbildendes Programm*:

(1) Nimm eine Zeichenklasse.

(2) Ersetze jede Kategorie (Haupt- und Stellenwert) durch ihr inverses Element.[6]

(3) Ordne die in (2) erzeugten Subzeichen nach absteigender Semiotizität des Hauptwertes.

(4) Stop.

Das obige Programm definiert zugleich eine einstellige Operation, die ich *Symplerosis* (aus dem Griechischen συμπλήρωσιζ: Komplement) nennen und mit σ bezeichen werde. Es gilt:

$$\begin{array}{llll} \text{Zkl. } 1 \div \text{Zkl. } 2 & \text{gdw.} & \sigma\,(\text{Zkl. } 1) = \text{Zkl. } 2 & \text{und} \\ & & \sigma\,(\text{Zkl. } 2) = \text{Zkl. } 1. & \end{array}$$

Ein Beispiel wird sicherlich das Ganze deutlicher machen. (Die in Klammern angegebenen Zahlen weisen auf den entsprechenden Befehl im Programm hin.):

$$\begin{array}{lcccccccccccc} (1) & 3 & . & 1 & 2 & . & 1 & 1 & . & 3 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & (3) & \\ (2) & 1 & . & 3 & 2 & . & 3 & 3 & . & 1 & \longrightarrow & 3.1 \quad 2.3 \quad 1.3 & \end{array}$$

Es ist also σ (3.1 2.1 1.3) = 3.1 2.3 1.3; da auch σ (3.1 2.3 1.3) = 3.1 2.1 1.3 gilt, ist 3.1 2.1 1.3 $\div$ 3.1 2.3 1.3. Mit demselben Algorithmus finden wir alle anderen Komplemente.

6 Das heißt: .1. durch .3., .2. durch .2. und .3. durch .1.; s.o. die angegebene Multiplikationstabelle und inversen Elemente.

Zkl. 1				Zkl. 2			Rpw. 1		Rpw. 2		
3.1	2.1	1.1	÷	3.3	2.3	1.3	9	+	15	=	24
3.1	2.1	1.2	÷	3.2	2.3	1.3	10	+	14	=	24
3.1	2.1	1.3	÷	3.1	2.3	1.3	11	+	13	=	24
3.1	2.2	1.2	÷	3.2	2.2	1.3	11	+	13	=	24
3.1	2.2	1.3	÷	3.1	2.2	1.3	12	+	12	=	24
3.2	2.2	1.2	÷	3.2	2.2	1.2	12	+	12	=	24

Wie man sehen kann, ist die Summe der entsprechenden Repräsentationswerte stets 24, also zweimal der Repräsentationswert des vollständigen Objekts bzw. des Zeichens selbst. Diese beiden Zeichenklassen sind übrigens die einzigen, die sich selbst komplementieren.

Um das Komplement einer Realitätsthematik zu generieren, müssen wir unser Programm folgendermaßen ändern:

(1') Nimm eine Realitätsthematik.

(2') Ersetze jede Kategorie (Haupt- und Stellenwert) durch ihr inverses Element.

(3') Ordne die in (2') erzeugten Subzeichen nach aufsteigender Semiotizität des Stellenwertes.

(4') Stop.

Entsprechend wird eine Symplerosis σ' für Realitätsthematiken definiert:

Rth. 1 ÷ Rth. 2 gdw. σ'(Rth. 1) = Rth. 2 und
σ'(Rth. 2) = Rth. 1.

Der Leser wird bestimmt Spaß daran haben, mit Hilfe dieses Algorithmus die komplementären Realitätsthematiken zu berechnen. Beide Programme sind außerdem ohne weiteres auf die Große Matrix anwendbar.

Damit ist das Spiel mit den Primzeichen zu Ende, die interessanten Fragen fangen aber erst an: Was sind komplementäre Zeichen überhaupt? Was sind komplementäre Realitäten? Wieso sind Formeln und Funktionen, Regeln und Konstanten, Variable und Gleichungen zueinander komplementär? Kann man komplementäre Zeichen- bzw. Realitätsthematiken gebrauchen, um Begriffspaare wie "Motiv/Hintergrund", "Entscheidbargebrauchen, um Begriffspaare wie "Motiv/Hintergrund", "Entscheidbarkeit/Unentscheidbarkeit", "Ordnung/Chaos" usw. semiotisch zu untersuchen? Ich weiß es nicht, aber der Versuch, Antworten zu finden, würde sich bestimmt lohnen.

Nachwort

Diesen Aufsatz habe ich im November 1988 geschrieben. Nachdem er zunächst nicht publiziert wurde, geriet er bei mir in Vergessenheit, bis Manfred Zippel auf der Jahresversammlung der Vereinigung für Wissenschaftliche Semiotik am 25. Otkober 1991 seinen Vortrag über "Ein allgemeines triadisches Zeichen- Zahlen-System als Grundlage der Semiotik" hielt. Die von ihm vorgestellten Überlegungen haben mich an meine Experimente mit Komplementen und Inversbildungen erinnert und gaben mir die nötige Motivation, meinen Artikel aus einer dunklen Ecke der Festplatte hervorzuholen und ihn doch noch zu publizieren. Eine Kopie des Manuskripts habe ich Herrn Zippel geschickt und daraufhin ein sehr langes Telefonat mit ihm darüber geführt. Er machte mich unter anderen auf die sehr wichtigen Gemeinsamkeiten zwischen meiner Arbeit und seinem "Essay über die zehnte Muse" (Semiosis 57/58 (1990) 47-54) aufmerksam.

LITERATUR

Ledermann, Walter. *Einführung in die Gruppentheorie für Studenten der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Ingenieurwissenschaften.* Braunschweig: Vieweg 1977.

Lipschutz, Seymour. *Essential Computer Mathematics.* New York: McGraw-Hill 1982.

Walther, Elisabeth. *Allgemeine Zeichenlehre. Einführung in die Grundlagen der Semiotik.* Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt ^{2}1979.

Wörterbuch der Kyernetik. Hg. G. Klaus und H. Liebscher. Frankfurt a.M.: Fischer 1979, Bd. II.

SUMMARY

A semiotical singulary operation is introduced in this essay. Applied to any sign-class, it creates one complementary to this sign-class. As a result, the relation of complementarity between sign-classes is also defined. The operation as well as the relation are adjusted with regard to their application to themes of reality.

SEMIOSIS 65·66 67·68

Internationale Zeitschrift
für Semiotik und Ästhetik
17. Jahrgang, Heft 1-4, 1992

INHALT