Hariss Kidwaii

Mathematikunterricht: Semiotische Aspekte

In letzter Zeit war zu beobachten, daß sich eine starke Diskussion um die Probleme der Wissensdarstellung im Mathematikunterricht zu entwickeln begonnen hat (Godino/Batanero; Beck/Maier; Gallin/Ruf; Steinbring; Wittmann). Hierbei wird die Rolle der Sprache bei der Präsentation mathematischer Konzepte genau so in den Vordergrund gerückt (Beck/Maier; Gallin/Ruf) wie die Frage nach dem Wesen mathematischer Objekte (Godino/Batanero) und ihrer Präsentation (Steinbring; Wittmann). Die kontrovers geführte Argumentation zieht leider bisher die zentrale Rolle nicht in Betracht, die die Semiotik in diesem Kontext einnimmt.

Die von Ch. S. Peirce entwickelten Ideen der modernen Semiotik, die an der Universität Stuttgart seit den fünfziger Jahren von Max Bense (1981) und Elisabeth Walther (1979) weiterentwickelt worden sind, bieten neue Möglichkeiten der Betrachtung und Präsentation des mathematischen Wissens, insbesondere auf verschiedenen Stufen des Anfangsunterrichts in der Schule. Auch René Thom hat sich sehr engagiert mit den Problemen des Unterrichts der modernen Mathematik auseinandergesetzt und teilweise auch deren semiotische Aspekte angesprochen. Ihn interessiert auch die Rolle der 'modernen Mathematik' in der Mathematikausbildung und ihrer Didaktik (Thom, 1973; 1974). Die vorliegende Arbeit hat auch von seinen Ideen und seinen semiotischen Überlegungen (Thom, 1978; 1980) Anregungen erhalten. Max Bense hat sich in verschiedenen Arbeiten mit der semiotischen Fundierung der Mathematik beschäftigt und wichtige Grundgedanken geliefert (Bense, 1981). Die Grundprobleme der semiotischen Grundlegung von Logik und Mathematik sind auch bereits von Ch. S. Peirce (1976) behandelt worden.

Ziel dieser Arbeit ist es, anhand von Beispielen aus zwei Geometriebüchern für die Schule (Schmid/Schweizer; Kuypers) zu zeigen, welche Rolle die Semiotik bei der

Einführung bzw. Weiterentwicklung mathematischer Ideen spielt und welche Verständnisprobleme auftauchen können, falls semiotische Aspekte unberücksichtigt bleiben. Ferner soll für den Innenwinkel-Satz für Dreiecke, den Satz des Thales und den Mittelpunktswinkel-Satz gezeigt werden, wie semiotische Überlegungen eindeutig bestimmte Beweisstrategien nahelegen, die zu innovativen Gedanken führen. Ich habe Geometrie als Untersuchungsfeld gewählt, weil dieses Gebiet der Mathematik auch leicht von denen verstanden werden kann, die u. U. keine speziellen mathematischen Kenntnisse haben. Ferner bietet die euklidische Geometrie der Ebene ein sehr gutes Beispiel dafür, wie Beweisverfahren nach formalen Schemata angewendet werden.

Ein Blick in die Schulbücher der Mathematik - auch aus nichtgeometrischen Bereichen - zeigt, wie mit Wörtern der natürlichen Sprache und eigenen mathematischen Zeichen formale mathematische Sprache entsteht, die zur Präsentation mathematischer Objekte gebraucht wird. Man denke hierbei an Algebra, Stochastik, Analysis oder Analytische Geometrie. Dieser Vorgang des 'Zeichenentwurfs' und der Zeichenprozesse bei der Entwicklung und Darstellung mathematischen Wissens ist in Wirklichkeit den Regeln der wissenschaftlichen Semiotik unterworfen. Es ist deshalb verständlich, daß, wenn bei diesen Vorgängen die semiotischen Regeln mißachtet werden, es sowohl zu Verständnisschwierigkeiten als auch zu Denkhemmnissen führen kann, bei den Anfängern mehr als bei den Fortgeschrittenen. Man wäre deshalb geneigt zu fragen, wie eine überlegte Berücksichtigung der semiotischen Regeln beim Mathematikunterricht bzw. beim Verfassen mathematischer Bücher Verständnisproblemen vorbeugen und evtl. auch zu kreativem Denken und neuen Ideen in der Schulklasse führen kann.

Trotz aller Fortschritte in der Didaktik der Mathematik läßt sich der Didaktikliteratur entnehmen, daß der Mathematikunterricht in der Schule nach wie vor mit gewissen grundsätzlichen Problemen konfrontiert ist, die anscheinend nicht zu beseitigen sind. Dies wird auch durch Ergebnisse einer OECD-Studie festgestellt, die bei einem 26-Länder-Vergleich die deutschen Achtklässler in Mathematik auf Platz 16 plaziert (Schacht). Wir wissen auch, daß, wenn irgendeine Wirtschaftsbranche in dieser Zeit der angeblichen „Flaute“ ungebremst boomt, so es die des Nachhilfeunterrichts im Fach Mathematik ist. Der Standpunkt, daß Mathematik ein schwieriges Fach und deshalb schwerverständlich sei, ist wohlbekannt. Die Mathematikdidaktik legt deshalb großen Wert auf die Methodik des Mathematikunterrichtes. Wir stellen uns die Frage, ob - neben den Methoden - semiotische Fehler ebenfalls zu Problemen des Mathematikunterrichtes beitragen. Zum Teil liegen die Probleme des Mathematiklehrens und -lernens in der Schule an der Themenauswahl und einer Überbetonung der "Regelbeherrschung". Bei genauerem Anschauen der schulischen Mathematiklehrbücher wird einem aber auch klar, daß in erster Linie beim Entwurf der Büchertexte Grundregeln der Semiotik mißachtet werden. Offensichtlich gehen die Didaktiker davon aus, daß das 'bessere' Lernen durch immer verfeinertere 'Methoden' erreicht werden kann. Eine Behauptung, die durch die Tatsachen widerlegt wird (Schacht).

Die Tatsache, daß alle Bereiche der Mathematik über eigene Zeichensysteme verfügen, darf als allgemein bekannt angenommen werden. Daß aber bei der Wissensdarstellung in der Mathematik die Zeichensysteme ebenfalls die zentrale Rolle spielen, kann von jeder/jedem nachvollzogen werden, die/der sich noch ein wenig an den Mathematikunterricht an der Schule - wenn auch ungern - zu erinnern vermag. Den Buchautoren kann dies nicht unbekannt sein; denn bei der Gestaltung der Bücherinhalte wird auf jeden Fall reichlich Gebrauch gemacht von verschiedenen Farben und Schriftarten etc., um die Aufmerksamkeit der Leser-/Innen auf manche Wörter, Textteile oder Zeichnungen zu lenken. Wenn bei der Darstellung der mathematischen Ideen zeichentheoretische Aspekte ignoriert werden, können beim Verstehen dieser Ideen und deren Weiterverwendung und -entwicklung erhebliche Schwierigkeiten entstehen, die nicht unbedingt mit den Ideen, sondern in erster Linie mit der falschen Auswahl der Zeichen zu tun haben. Um diesen Sachverhalt darzustellen, betrachten wir einige Beispiele aus dem Gebiet der euklidischen Geometrie der Ebene, wie sie in den Schulbüchern der Klassen 6-8 dargestellt werden. Die euklidische Geometrie mit ihren ständigen Bezügen zum intuitiv Gegebenen bietet große Möglichkeiten zum innovativen Denken. Leider werden diese Möglichkeiten in den Schulbüchern nicht aufgezeigt. Interessanterweise kann gezeigt werden, wie semiotische Überlegungen zu neuen Ideen und neuen Lösungen bekannter Sätze führen können.

Wir erläutern einige Aspekte unserer Überlegungen anhand von Beispielen aus den Schulbüchern (Schmid/Schweizer; Kuypers), die als repräsentativ für Deutschland gelten könnten. In der Geometrie - d. h. der euklidischen Geometrie der Ebene - werden häufiger als in den anderen Bereichen der Mathematik Wörter der Umgangssprache als Zeichenmittel aufgenommen und, mit zugehörigem Objekt und Interpretanten versehen, zum vollständigen Zeichen im Sinne einer triadischen Relation (Walther, S.54) eingeführt. Man denke hierbei etwa an die Wörter der Umgangssprache: Winkel, Gerade, Linie, Schenkel, Scheitel, (linke, rechte) Drehung, Dreieck, Kreis, Rechter Winkel usw., die in der Geometrie mit eigenen, kontextbezogenen Zeichenbezügen fungieren.

Wir betrachten etwa die Einführung des geometrischen Zeichens 'Winkel' (in Schmid/Schweizer, S. 14). Der Interpretant des Zeichens 'Winkel' wird wie folgt festgelegt (die aus den Büchern entnommenen Texteile sind im Verlauf dieser Arbeit kursiv wiedergegeben und mit 1.x (Schmid/Schweizer) bzw. 2.x (Kuypers) laufend durchnumeriert):

1.1 *"Zwei vom gleichen Punkt S der Ebene ausgehende Halbgeraden g, h teilen die Ebene in zwei Teile. Jeder dieser Teil (mit Rand) heißt Winkel. g und h heißen Schenkel, S der Scheitel des Winkels."*

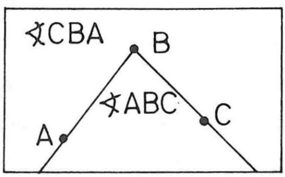


Fig. 14.4

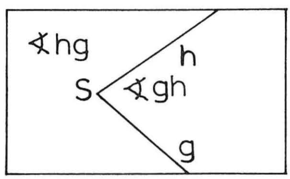


Fig 14.3

Diese Aussage ist der Interpretant des hier eingeführten Zeichens 'Winkel' und legt seinen Objektbezug fest. Der Interpretant besteht aus Elementen der Umgangssprache und geometrischen Zeichen, deren Kenntnis bereits vorausgesetzt wird: Punkt, Halbgerade, Ebene und Rand. Diese sollten zuerst interpretiert werden, um den Interpretanten des Winkels voll zu verstehen. Dieser Prozeß könnte eigentlich beliebig fortgesetzt werden. Eine Situation, die Peirce das 'Wachsen des Zeichens' nennt (Walther, S.74). Dieses 'Wachsen' ist aber auch eine mögliche Quelle der Fehlinterpretationen des Zeichens i. a. Eine andere Fehlermöglichkeit liegt in unserem Fall in der Zeichnung, Fig 14.3. Sie enthält Teilzeichen :' g ', ' h ', S, $\square$, $\sphericalangle$ gh $\sphericalangle$ hg. Falls diese Teilzeichen und ihre Beziehung zueinander in Fig. 14.3 von dem abweichen, was der Interpretant (Text 1.1) angibt, dann können Unklarheiten über den Objektbezug von 'Winkel' entstehen. Dies ist z. B. hier auch der Fall: In der Fig. 14.3 kommen ' $\sphericalangle$ hg' und ' $\sphericalangle$ gh' vor. Ihre Zeichenbezüge sind aber weder im Interpretanten von 'Winkel' noch vorher im Buch erklärt worden, sondern sie werden später im Text 1.2 erklärt.

Die Zeichnung von Fig 14.3 bzw. Fig 14.4 für sich betrachtet, stellt Teile einer Ebene abbildend dar und ist deshalb Element der Zeichenklasse (3.1, 2.1, 1.2). Hier wirkt das Teilzeichen 'Fig. 41.3' - bzw. 'Fig. 14.4' - als Element der Klasse (3.2, 2.2, 1.2) und als Index auf den Interpretantentext des 'Winkels' (Text 1.1). Damit wird der Objektbezug des 'Winkels' mittels Fig. 14.3 hergestellt.

Die Fig. 14.4 ist an der Stelle, wo sie steht, für den Interpretanten von 'Winkel' (Text 1.1) irrelevant. Ihre Zeichenbezüge sind zuerst nicht erkennbar. Dies zeigt auch, wie Interpretationsschwierigkeiten eines Zeichens - in diesem Fall Fig. 14.4 - auftreten können, wenn es an falscher Stelle und damit im falschen Kontext steht.

Im Buch werden dann durch Text 1.2 die Bezüge der Zeichen 'erster Schenkel' und 'zweiter Schenkel' festgelegt:

1.2: *"Durch eine (Links-)Drehung um S kann g in h übergeführt werden, dabei überstreicht g den braunen Winkel. Man nennt deshalb g den ersten, h den zweiten Schenkel dieses Winkels."*

Interessanterweise wird die Auswahl der Mittel - d. h. Namen - gerechtfertigt: "Man nennt deshalb....". Dies ist eine Abweichung vom Vorgehen im Text 1.1, wo die Auswahl der Zeichenmittel 'Winkel', 'Schenkel' etc. nicht gerechtfertigt wird. Man kann feststellen, daß sich die Verfasser der Tatsache nicht bewußt sind, daß sie sich in einem semiotischen Prozeß befinden, in dem jeder Schritt erhebliche Auswirkungen im Interpretantenbereich des Prozesses auslösen kann. Anschliessend wird der Interpretant des Zeichens $\sphericalangle$gh' aus Fig. 14.3 festgelegt:

1.3: *"Den Winkel mit dem ersten Schenkel g und dem zweiten Schenkel h bezeichnet man mit $\sphericalangle$ gh (lies: Winkel gh)."*

Der in Klammern stehende Text: '..lies Winkel gh', führt eigentlich ein neues Zeichen ein, nämlich:' Winkel gh'. Dem Text 1.3 nach ist sein Interpretant ebenfalls Text 1.1. Dort wird aber explizit 'Winkel' interpretiert. In Anbetracht des Mittels 'Winkel gh' scheint nun, daß der Text 1.1 als Interpretant des 'Winkels' falsch ist. Offensichtlich hat das Fehlen von 'g', 'h' in diesem Zeichenmittel - 'Winkel' - eine interpretierende Relevanz, die aber in Fig 14.3 nicht sichtbar ist. Nach Darstellung der Verfasser haben also die Zeichen 'Winkel' und 'Winkel gh' den gleichen Objektbezug. Dies ist eine unnötige und unbeabsichtigt herbeigeführte Konfliktsituation.

Es sei lediglich noch angemerkt, daß das Zeichen Fig 14.4 mit Text 1.1 bzw. Text 1.2 nicht interpretierbar ist und deshalb als Teilzeichen stehen bleibt, es wäre denn, daß man sich bemüht, aus Text 1.2 einen Interpretanten für es zu konstruieren. Dem Text 1.2 entnimmt man auch, daß das zwischen den Schenkeln g und h an S stehende '$\sphericalangle$gh' ein Substitut für 'Winkel gh' sein soll.

Nachdem die Zeichen 'Winkel' und 'Winkel gh' eingeführt worden sind, wird der Interpretant von 'Winkelweite' eingeführt:

1.4: *"Unter der Winkelweite(oder Größe) eines Winkels versteht man das Drehmaß der Drehung um den Scheitel, die den ersten Schenkel in den zweiten überführt. Winkelweiten werden also in Grad angegeben."*

Wenn man sich daran erinnert, daß im Mathematikunterricht die natürlichen bzw. Bruchzahlen zur 'Kennzeichnung' von linearen Skalen verwendet werden, so bringt zuerst die Einführung von Kreisskalen von der Interpretation her ein neues Problem mit sich, was hier allerdings nicht näher behandelt werden soll. Dieses semiotische Problem wird in Schmid/Schweizer auch nicht angesprochen. Weil bei der Einführung im Text 1.4 vom Zeichen 'Grad' der Drehung ausgegangen wird, wird auch bei 'Winkelweite' von 'Grad' gesprochen. Dies wird deutlich im Text 1.4 durch "also" im Ausdruck: "...also in Grad angegeben." Es wird an dieser Stelle vereinbart:

1.5:*"...Meistens bezeichnen wir Winkelweiten mit kleinen griechischen Buchstaben, die wir in einen von Schenkel zu Schenkel reichenden Kreisbogen (Fig 14.5) schreiben..."*

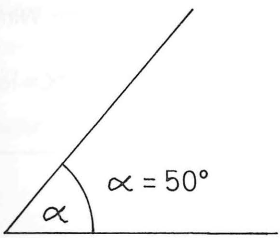


Fig 14.5

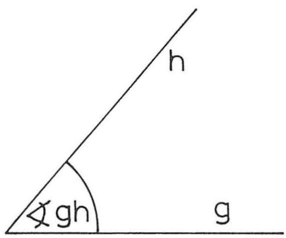


Fig. 14.6

Es wird aber gleich danach auch Fig. 14.6 angegeben.

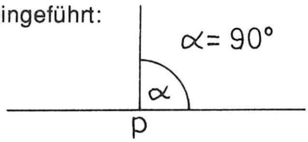
In Anlehnung an Fig. 14.5 würde man Fig. 14.6 wie folgt interpretieren wollen: Die Winkelweite des von g und h gebildeten Winkels ist ∢ gh. Dies wäre aber falsch, da $\sphericalangle gh$ 'Winkel gh' und nicht dessen Weite bezeichnet. Fig. 14.5 läßt die Interpretation zu, daß alles, was im Kreisbogen zwischen den Schenkeln steht, die Weite des von diesen Schenkeln gebildeten Winkels bedeutet. Daß hier auch Zeichen stehen können, die keine griechischen Buchstaben sind, wird aufgrund des Textes 1.5. erlaubt: "..Meistens..". Die Plazierung von gh in Fig 14.6 an S bzw. innerhalb des Kreisbogens ist ein Beispiel der Konstruktionsfehler beim Entwurf der Mittel, die dann zu Interpretationsfehlern führen können.

Wir finden auch:

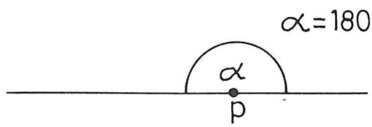
1.6: *"Wenn es nicht mißverständlich ist, sagen wir im folgenden statt "Winkelweite" oft auch kurz "Winkel". "*

Damit erhält das Zeichen 'Winkel' in Abhängigkeit vom Zeichenkontext seine Bedeutung als 'Winkelweite'. Wenn dies nicht *mißverständlich* sein soll und wie *oft* dies geschehen mag, geht aus Text 1.6 nicht hervor. Wenn man aber bedenkt, daß bereits Text 1.1 das Zeichen 'Winkel' nicht ausreichend interpretieren hilft - er ist eigentlich Interpretant von 'Winkel gh' -, so ist diese (s.Text 1.6) Substitution - wenn auch nur gelegentlich - durchaus nicht empfehlenswert.

Es werden dann mit Hilfe vom Geodreieck 'rechter Winkel' und 'gestreckter Winkel' eingeführt:



rechter Winkel



gestreckter Winkel

Für '90 Grad' wird '90°' substitutiert. Zuviele Zeichensubstitutionen - und ohne Begründungen - führen ebenfalls zu Interpretationsschwierigkeiten. Anhand von Meßübungen an Winkeln wird auch die Summe von Winkelweiten wie

$$\alpha + 30° = 90°$$

usw. eingeführt. Es wird hier semiotisch ein großer Schritt getan: Die Objekte der 'Winkelweite' werden mit Mitteln aus dem Bereich der natürlichen Zahlen 0, 1, 2,... indiziert und dadurch in den Bedeutungsbereich der Zeichen '+' und '-' und den aus diesen bestehenden Operationen gebracht. Damit wird das Denken in geometrischen Zeichen in das der arithmetischen bzw. algebraischen übertragen. Die Möglichkeiten des Denkens in der Geometrie werden dadurch aber erheblich beeinträchtigt. Die Verfasser empfehlen dann, das Geodreieck wegzulassen und sich damit auf die geometrischen Objekte zu konzentrieren :

1.7: *"..wie kann man allein mit Hilfe eines Lineals - also ohne Winkelmesser - zwei Winkel zeichnen, die zusammen 180° ergeben (die gleich groß sind)?"*

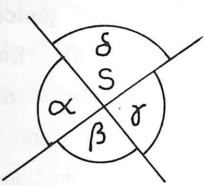


Fig 40.1

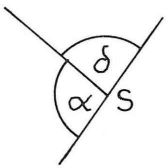


Fig 40.2

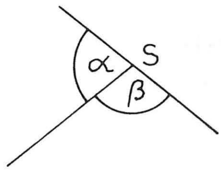


Fig 40.3

Die Geraden in Fig 40.1 bilden 4 Winkel. Zwei dieser Winkel, die einen Schenkel gemeinsam haben (Fig 40.2/3) und deren andere Schenkel eine Gerade bilden, nennt man Nebenwinkel. Nebenwinkel haben zusammen also eine Winkelweite von 180°. Zwei Winkel, die sich in Fig 40.1 gegenüberliegen, nennt man Scheitelwinkel (Fig. 40.5/6)."

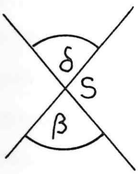


Fig. 40.5

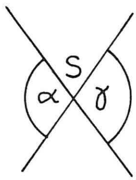


Fig. 40.6

Die Tatsache, daß hier einerseits 'ohne Winkelmesser' vorgegangen werden sollte, andererseits aber '...180°...' als Ergebnis verwendet wird, ein Zeichen, das ohne Winkelmesser nicht interpretierbar ist, zeigt zuerst eine semiotische Inkonsistenz. Durch Einführung des 'Nebenwinkels' wollen die Verfasser nun eigentlich den Weg vorbereiten für das Studieren der neuen Objekte, die dadurch entstehen, daß man bekannte Objekte miteinander in Beziehung setzt. Dadurch entstehen aber neue Objekte, die durch neue zusammengesetzte Zeichen repräsentiert werden und neue Eigenschaften haben. Bei Text 1.7 ist zu beachten, daß die Winkelweite von Nebenwinkeln umgangssprachlich mit '....haben zusammen ...' interpretiert wird.

Im weiteren Verlauf des Textes im Buch werden verschiedene Mittel (unten fett gedruckt) mit gleicher Bedeutung verwendet: ' Scheitelwinkel haben **gleiche Winkelweite'**; ' .. Winkel sind ... **gleich weit**...'; '...Winkel sind **gleich groß**...'. Eine Vorgehensweise, die das Mittelrepertoire vergrößert, ohne daß dadurch das Zeicheninterpretations- bzw. Zeichenfunktionsniveau zunimmt. Nachdem dann im Buch die Interpretanten von 'Scheitelwinkel', 'Wechselwinkel', 'Stufenwinkel' festgelegt und deren Objekte mit Zeichnungen präsentiert worden sind, wird der S. 44 folgender Text entnommen:

1.8: „*Winkelsumme im Dreieck*"

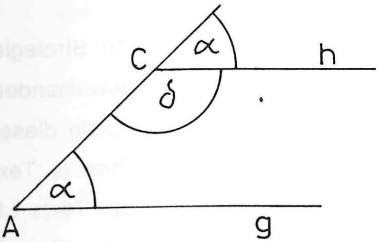


Fig 44.2

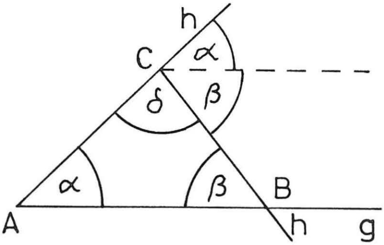


Fig 44.3

In Fig. 44. 2 sind die Halbgeraden g, h parallel. In diesem Fall ist $\alpha + \delta = 180$ °.

Ist - wie in Fig 44.3 - h nicht parallel zu g, so entsteht ein Dreieck ABC. Der Winkel bei C hat gegenüber Fig. 44.2 um eine Winkelweite β abgenommen; gleichzeitig ist in B ein neuer Winkel derselben Weite β entstanden (Wechselwinkel an Parallelen). Jetzt gilt daher: $\alpha + \beta + \delta = 180$ °.

Also:

In jedem Dreieck ergeben die Weiten der drei Innenwinkel zusammen 180 °:

$\alpha + \beta + \delta = 180$ °."

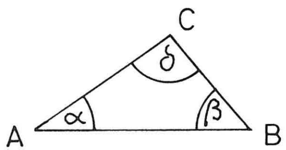
Abgesehen davon, daß im Verlauf von Text 1.8 viele neue Zeichen auftauchen, die neu interpretiert werden müßten: '... um eine Winkelweite β **abgenommen**', '...Winkel **bei C**...' etc., wird in der Überschrift von '**Winkelsumme**' gesprochen. Diese ist bis dahin weder im Buch vereinbart noch im Verlauf des Textes 1.8 verwendet worden. In der Formulierung des Ergebnisses wird '..ergeben die Weiten der drei Innenwinkel ' verwendet, was nahelegt, dies sei der Interpretant von 'Winkelsumme'.Eine Vermutung, die nicht nur falsch wäre, sondern auch zu anderen Interpretationsproblemen führen könnte. Dieses Beispiel zeigt, daß Zeichen eingeführt werden, die unmittelbar nicht gebraucht werden, deren Interpretanten nicht festgelegt werden und die dann sehr mühsam durch einen aufwendigen Prozeß interpretiert werden müssen.

Um eine Aussage als wahr beweisen zu können, wird eigentlich eine Strategie gebraucht. Ich gehe davon aus, daß die semiotische Struktur der zu beweisenden Aussage, die selbst ein zusammengesetztes Zeichen ist, beim Entwickeln dieser Strategie eine wichtige Rolle spielt. Beim vorhergehenden Beweisverfahren (s. Text 1.8) ist eine Strategie nicht sichtbar. Wenn wir die letzten zwei Zeilen des Texts 1.8 betrachten, so ist sicherlich nicht nachvollziehbar, warum die Autoren den Prozeß der Argumentation, d. h. den Prozeß der logischen Folgerungen, mit der Fig. 44.2 beginnen, in der kein Dreieck sichtbar vorkommt, obwohl die zu beweisende Aussage mit 'In jedem Dreieck.. ' beginnt. Obwohl die Argumentation im Text 1.8 ohne algebraische Zeichen und Operationen auskommt, wird das Ergebnis im algebraischen Zeichensystem dargestellt. Damit wird der Interpretationsprozeß unnötig verzerrt.

Um klar im Rahmen der vereinbarten geometrischen Zeichen zu bleiben und deren Interpretationsfelder zu benutzen, schlage ich vor, die Aussage des Textes wie folgt umzuformulieren. Die folgenden Argumentationsschritte in 1 bis 7 sind mir aus der Fachliteratur nicht bekannt :

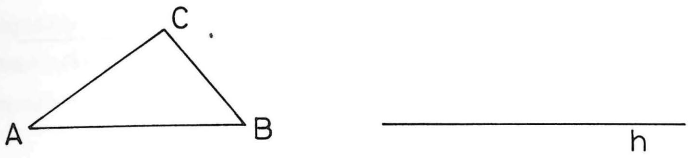
I.

Wenn ABC ein Dreieck mit den Innenwinkelweiten α, β, δ ist, dann gibt es einen gestreckten Winkel, der in Teilwinkel mit Weiten α, β, δ zerlegt werden kann.

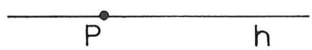


Eine kontextbezogene Zeicheninterpretation legt uns folgende Strategie nahe:

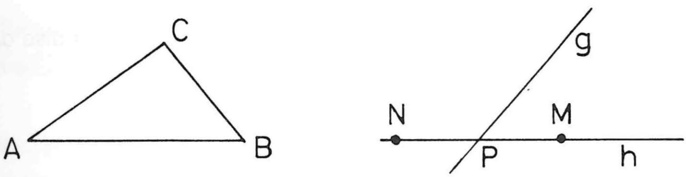
1. Wir nehmen eine Gerade h in der Ebene parallel zu AB. (Man kann genau so gut eine Parallele zu BC oder AC nehmen).



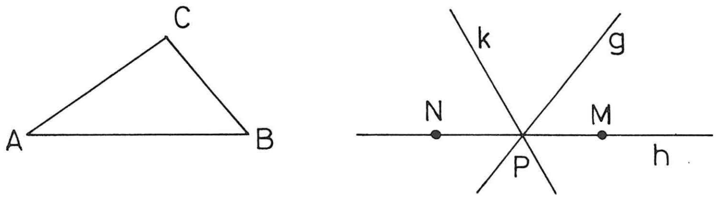
2. Wir nehmen einen (beliebigen) Punkt P auf der Geraden h.



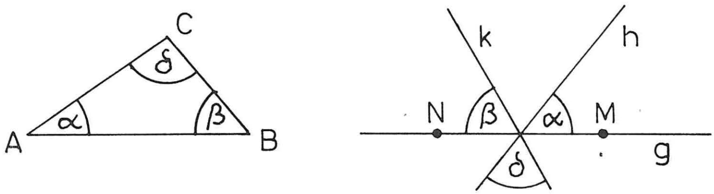
3. Wir zeichnen durch P eine Parallele g zu AC und nehmen Punkte M, N auf h.



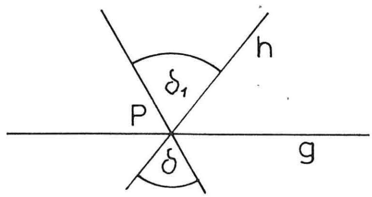
4. Wir zeichnen durch P eine Gerade k parallel zu CB.



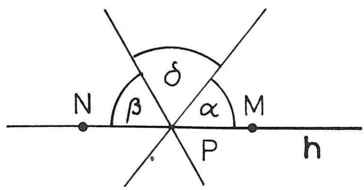
5. Es entstehen in P sechs Winkel. Drei haben die gleichen Weiten wie die Winkel des Dreiecks (Stufenwinkel an Parallelen: (Schmid/Schweizer, S. 42))



6. Wir bezeichnen den Scheitelwinkel zu δ mit : δ_1 .



7. Da aber δ gleich δ_1 ist (Gleichheit der Scheitelwinkel), haben wir also das Ziel erreicht:



Es gibt eine Gerade h und einen Punkt P auf h, so daß der gestreckte Winkel $\sphericalangle$ MPN in P aus 3 Teilen besteht, deren Weite jeweils den Weiten der Innenwinkel des Dreiecks ABC gleich sind.

Vorausgesetzt, daß die Zeichenbezüge von 'Summe von Winkelweiten' genau vereinbart wären, könnte man eine andere Interpretation der obigen Aussage wie folgt vornehmen:

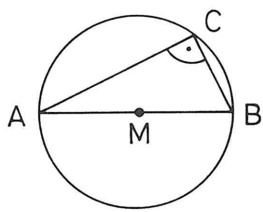
Die Summe von Winkelweiten der Innenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Weite eines gestreckten Winkels.

Bei unserer Vorgehensweise haben wir lediglich die Unterteilung eines 'gestreckten Winkels' im Kontext von den Zeichen der Voraussetzung der zu beweisenden Aussage neu interpretiert. Die Interpretation der Folgerung und der Voraussetzung läßt keine andere Reihenfolge für die Schritte 1.-7. zu. Dies führt dazu, daß jemand, der einmal die Schritte 1.-7. nachvollzogen hat, sie mit großer Sicherheit wieder konstruieren kann. Dies kann von der Vorgehensweise der Verfasser im Text 1.8 nicht behauptet werden, da dort sowohl der Beginn der Argumentation mit Fig. 44.2 als auch deren Fortsetzung in Fig. 44.3 sehr willkürlich und deshalb dem Leser aufgezwungen ist. Diese Art der Argumentation läßt sich vom Leser nicht rekonstruieren, es sei denn, er lernt sie auswendig, was aber nur auf Kosten der Entwicklung der Argumentationsfähigkeit geschieht.

Wir betrachten noch einen anderen Satz und dessen Beweis aus (Schmid/Schweizer, S. 58):

1.9: *"Satz d. Thales :*

Wenn bei einem Dreieck ABC, die Ecke C auf dem Halbkreis über AB liegt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel."



Der Satz wird im Buch wie folgt bewiesen:

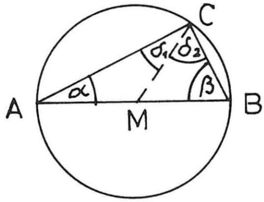
1.10: *"Dreiecke AMC, MBC sind gleichschenklig, d.h.* $\alpha = \delta_1, \ \beta = \delta_2$.

Also: $\alpha + \delta_1 + \beta + \delta_2 = 180°$ *(Winkelsumme im Dreieck)*

Folglich:

$2(\delta_1 + \delta_2) = 180°$,

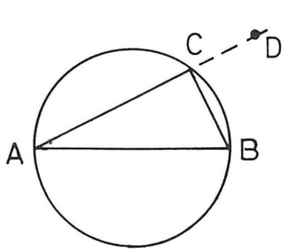
also: $\delta_1 + \delta_2 = 90°$."



Dieser Beweis macht wiederum keinen Gebrauch von der Bedeutung von 'rechter Winkel' bei C, wie es in der Aussage des Satzes vorkommt. 'Rechter Winkel' hängt bedeutungsmäßig eng mit 'Nebenwinkel' und 'gestreckter Winkel' zusammen, denn: Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist stets selbst ein rechter Winkel (s. Text 1.7). Dieser Bedeutungszusammenhang legt uns folgende Strategie nahe:

II.

Wenn wir zeigen können, daß in C die Winkel ∢ACB und ∢BCD die gleichen Weiten haben, dann wären sie als Nebenwinkel beide rechte Winkel und deshalb wäre Winkel ∢ ACB ein rechter Winkel.



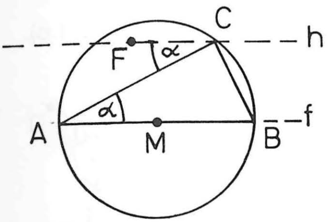
Diese Strategie führt eindeutig zu folgenden Schritten, die aus der Fachliteratur nicht bekannt sind:

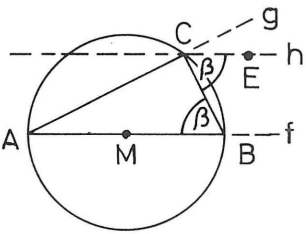
1. Ziehe eine Gerade h parallel zu AB durch C. Es gelten dann:

   a) Die Winkelweiten von $\sphericalangle$FCA und $\sphericalangle$BAC sind gleich.

   ($\sphericalangle$FCA und $\sphericalangle$BAC sind Wechselwinkel an Parallelen h und f.)

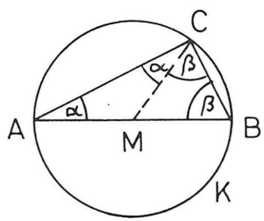
   b) Die Winkelweiten von $\sphericalangle$CBA und $\sphericalangle$BCE sind gleich.



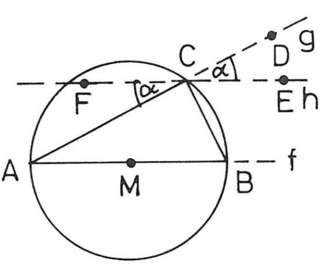


($\sphericalangle$ CBA und $\sphericalangle$ BCE sind Wechselwinkel an Parallelen h und f .)

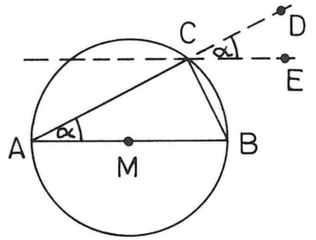
2. MA, MB und MC sind Radien des Kreises K und haben deshalb paarweise die gleiche Länge. Im Dreieck AMC sind deshalb die Winkelweiten von $\sphericalangle$ MAC und $\sphericalangle$ ACM gleich (Basiswinkel-Satz). Genauso gilt, daß die Winkelweiten von $\sphericalangle$ CBM und $\sphericalangle$ MCB gleich sind.



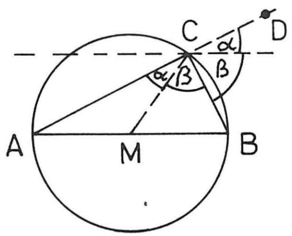
3. Die Winkel $\sphericalangle$ ECD und $\sphericalangle$ FCA haben die gleiche Weite (Scheitelwinkel).



4. Die Winkel ∢ BAC und ∢ ECD haben die gleiche Weite (3. und 1.)



5. Die Winkel ∢ ACB und ∢ BCD haben die gleiche Weite (4, 2. u. 1.b).



6. ∢ ACB und ∢ BCD sind Nebenwinkel und haben die gleiche Weite. (5.)

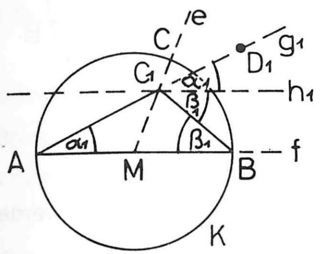
7. Jeder von diesen ist ein rechter Winkel (6.).

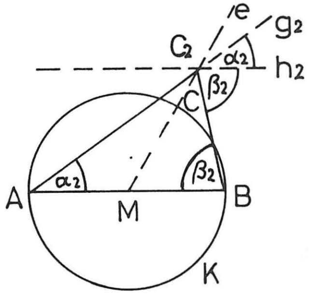
8. ∢ ACB ist ein rechter Winkel (7.).

Auch bei diesem Beweis wird von uns vom algebraischen Zeichensystem kein Gebrauch gemacht. Es werden lediglich die Bedeutungen der in der Satzaussage verwendeten geometrischen Zeichen zugrunde gelegt. Der Beweis (Schmid/ Schweizer, S. 58; Text 1.9) wird mittels des algebraischen Zeichensystems geführt und verwendet deshalb den Innenwinkelsumme-Satz (Text 1.8). Unsere Orientierung an Zeichenbedeutungen führt uns nicht nur eindeutig zu den Schritten 1.-8., sondern zeigt gewisse Eigenschaften von geometrischen Objekten auf, die durch den Text 1.10 nicht feststellbar sind.

III.

Wenn wir die Schritte 1. - 8. nochmals betrachten, so ist offensichtlich, daß die Schritte 1., 3. und 4. unabhägig davon sind, ob C auf dem Kreis K liegt oder nicht. Wir denken uns, daß sich C ein wenig in Richtung M auf der Geraden e bewegt und sich an der Stelle C_1 befindet. Die Schritte 1., 3. und 4. gelten noch, wenn man dort anstelle von C jeweils C_1 einsetzt. Genauso für C_2, wenn C sich weg von M auf e bewegt.

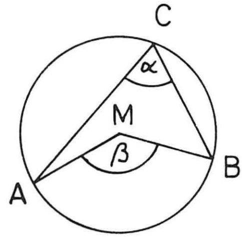




Aufgrund von 1., 3. und 4. kann man sagen: Die Weite des Winkels $\sphericalangle BC_1D_1$ ist gleich der Summe der Weiten von Winkeln $\sphericalangle MAC_1$ und $\sphericalangle C_1BM$. Je näher sich C_1 an C befindet, desto weniger unterscheidet sich die Weite des Winkels $\sphericalangle AC_1M$ von der des Winkels $\sphericalangle MAC_1$. Das Gleiche gilt für $\sphericalangle C_1BM$ und $\sphericalangle MC_1B$. Wenn aber C_1 mit C zusammenfällt, wird Schritt 2. und damit Schritte 5.- 8. gültig. Ersetzen wir in den obigen Zeilen C_1 durch C_2, so bleiben die Ausführungen auch für C_2 gültig. Wir können also feststellen, daß wenn sich C_1 bzw. C_2 auf C zu bewegt, sich der Winkel $\sphericalangle AC_1B$ bzw. $\sphericalangle AC_2B$ einem rechten Winkel nähert. Nur wenn C_1 bzw. C_2 auf dem Kreis K liegt und damit mit C zusammenfällt, wird $\sphericalangle AC_1B$ bzw. $\sphericalangle AC_2B$ ein rechter Winkel. Dies zeigt, daß die Winkelweite des Winkels $\sphericalangle AC_1B$ bzw. $\sphericalangle AC_2B$ bei Bewegung von C auf der Geraden e vom Kreis K beeinflußt wird.

IV.

Man kann den Schritten 1.- 8. bzw. den zugehörigen Zeichnungen auch entnehmen, daß der $\sphericalangle AMB$ ein gestreckter Winkel ist. Er läßt sich deshalb in zwei rechte Teilwinkel zerlegen. Da $\sphericalangle ACB$ ein rechter Winkel ist, besteht eine Beziehung zwischen dem Winkel $\sphericalangle AMB$ und dem $\sphericalangle ACB$; denn $\sphericalangle AMB$ läßt sich in zwei gleiche Teile zerlegen, so daß jeder von diesen die Weite von ∢ ACB hat. Es entsteht hier eine interessante Frage: Bleibt diese Beziehung bestehen, wenn ∢ AMB kein gestreckter Winkel ist?



Die Antwort gibt der Mittelpunktwinkel-Satz, den wir später behandeln werden.

Man kann in diesem Kontext noch einige andere Fragen entdecken. Die Versuche, diese Fragen zu beantworten, führen zu neuen Erkenntnissen. Die Fähigkeit, neue Fragen in einem gegebenen Kontext zu entdecken, ist genau so wichtig wie die, Antworten auf Fragen zu finden.

Diese Überlegungen in **III** und **IV** zeigen, wie statische Beziehungen geometrischer Objekte zueinander aufgrund semiotischer Betrachtungsweise (deren Ergebnis Schritte 1.- 8. sind) dynamisch aufgefaßt und neue Beziehungen zwischen Zeichenobjekten aufgezeigt werden können. Diese von mir vorgenommenen Erweiterungen in **III** und **IV** der Interpretation des Satzes des Thales ist das, was René Thom das Entdecken des intuitiv Gegebenen nennt (Thom, 1974).

Man kann aufgrund der Schritte 1.- 8. noch andere Interpretationen des Satzes des Thales vornehmen und andere interessante Zusammenhänge entdecken. Ich will diese aber an dieser Stelle nicht weiter ausführen.

Offensichtlich verhindert das Rechnen mit algebraischen Variablen im Text 1.10 weitergehende Interpretationen, die ich oben erzielen konnte. Diese Situation ist typisch nicht nur für den Text 1.10 der Geometrie, sondern ist in Schulbüchern aller mathematischen Fächer vorzufinden. Das Wechseln von einem Zeichensystem zum anderen, die mangelhafte Interpretation der Zeichen und die Unfähigkeit, mittels der Zeichenprozesse das im Umfeld intuitiv Gegebene zu entdecken, sind die meistverbreiteten Probleme der Mathematikbücher bzw. des Mathematikunterrichts.

Zum Schluß betrachten wir (aus Kuypers, S.156) den sog. Mittelpunktswinkel-Satz. Die Bedeutungen der Zeichen 'Umfangswinkel' und 'Mittelpunktswinkel' legen die Autoren bereits (Kuypers,S. 155) wie folgt fest:

2.1: „*Ein Winkel heißt "Umfangswinkel" eines Kreises K(M; r) genau dann, wenn sein Scheitelpunkt auf dem Kreis liegt und beide Schenkel den Kreis schneiden.*“ (Bild 12.6)

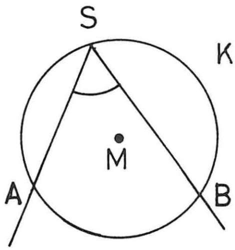


Bild 12.6

2.2: „*Ein Winkel heißt "Mittelpunktswinkel" eines Kreises K(M;r) genau dann, wenn sein Scheitelpunkt mit M zusammenfällt.*“ (Bild 12.7)

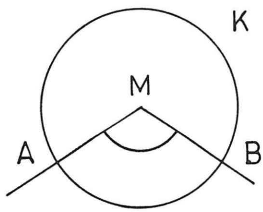


Bild 12.7

2.3: „*(Mittelpunktswinkel-Satz)*
Das Maß eines Mittelpunktwinkels ist doppelt so groß wie das Maß eines Umfangswinkels über demselben Bogen." (Bild 12.12).

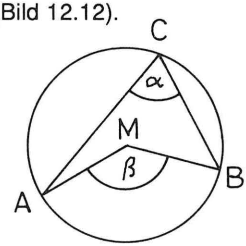


Bild 12.12

Beweis: Wir verbinden den Mittelpunkt des Kreises mit dem Scheitelpunkt des Umfangswinkels, so daß zwei gleichschenklige Dreiecke entstehen und wir den Basiswinkelsatz anwenden können. Dabei müssen wir drei Fälle unterscheiden, je nachdem die Hilfsstrecke zwischen den Schenkeln, auf einem Schenkel oder außerhalb der Schenkel des Umfangswinkels liegt (Bild 12.13).

Wir führen hier den Beweis für den ersten Fall; ....

(1) Das Viereck AMBC wird durch die Strecke MC in zwei gleichschenklige Dreiecke AMC und BMC zerlegt

(2) $\alpha_1 = \delta_1$ *und* $\alpha_2 = \delta_2$ *(Basiswinkel-Satz)*

(3) $\beta_1 = 180° - 2\alpha_1$ *und*

$\beta_2 = 180° - 2\alpha_2$ *(Innenwinkelsummen-Satz)*

(4) $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

(5) $\beta = 360° - (\beta_1 + \beta_2)$

$= 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ *(wg. (3))*

$= 2\alpha$ *(wg. (4)"*

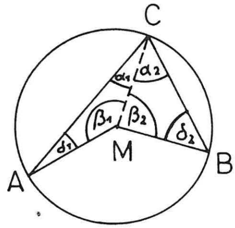


Bild 12.13

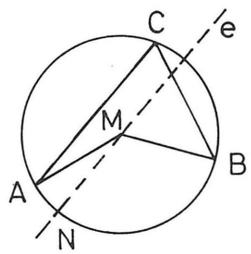
Wie beim Satz des Thales (s. Text 1.10) wird auch hier die Argumentation nicht von den kontextbezogenen Interpretationen der geometrischen Zeichen geleitet, sondern basiert ausschließlich auf dem Rechnen mit algebraischen Variablen. Dies erzwingt eine Strategie, die den Innenwinkelsummen-Satz für Dreiecke benötigt. Ich formuliere den Mittelpunktwinkel-Satz wie folgt um und zeige dessen Richtigkeit in folgenden 1 - 11 Schritten, die mir ebenfalls aus der Fachliteratur nicht bekannt sind:

V.

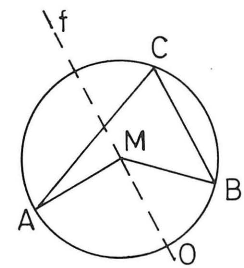
Der Mittelpunktswinkel läßt sich in Teilwinkel zerlegen, deren Weiten zweimal die Weite von $\sphericalangle$ ACB enthalten.

Von semiotischen Überlegungen her führen wir den Beweis wie folgt:

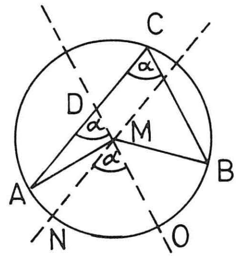
1. Wir legen durch M eine Parallele e zu AC



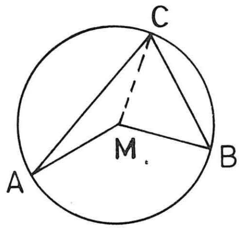
2. Wir legen durch M eine Parallele f zu BC



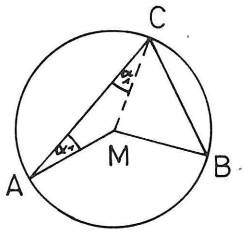
3. a) Die Weiten von $\sphericalangle$ ACB und $\sphericalangle$ ADM sind gleich (Stufenwinkel-Satz)
b) Die Weiten von $\sphericalangle$ ADM und $\sphericalangle$ NMO sind gleich.
c) Die Weiten von $\sphericalangle$ ACB und $\sphericalangle$ NMO sind gleich (a, b).



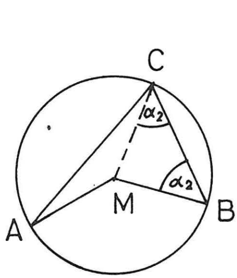
4. Wir verbinden M mit C



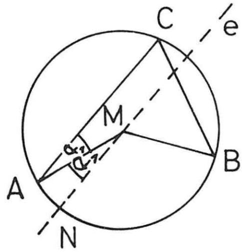
5. Die Weiten von $\sphericalangle$ ACM und $\sphericalangle$ MAC sind gleich (Basiswinkel-Satz)



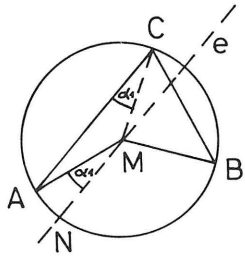
6. Die Weiten von $\sphericalangle$MCB und $\sphericalangle$CBM sind gleich (Basiswinkel-Satz)



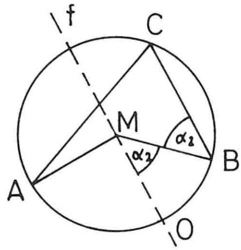
7. Die Weiten von ∢MAC und ∢AMN sind gleich (Wechselwinkel-Satz)



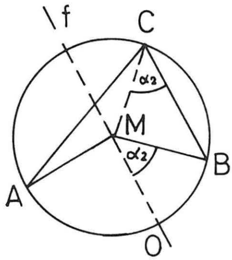
8. Die Weiten von ∢ ACM und ∢AMN sind gleich (5. und 7.)



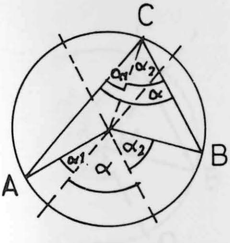
9. Die Weiten von ∢CBM und ∢OMB sind gleich, (Wechselwinkel-Satz)



10. Die Weiten von ∢MCB und ∢OMB sind gleich (6. und 9.)



11. Der Winkel ∢AMB läßt sich in Teilwinkel zerlegen, deren Weiten zweimal die Weite des Winkel ∢ACB enthalten (3.b, 8., 10.).



Damit ist der Satz bewiesen.

Auch die Argumentation vom 1. bis 11. Schritt basiert auf den kontextbezogenen Interprationen der in der Satzaussage verwendeten Zeichen, was dazu führt, daß die Reihenfolge dieser Schritte eindeutig ist.
Wenn wir im Text 2.3 die Formulierung "doppelt so groß" in Bezug auf den Mittelpunktswinkel ersetzen durch "halb so groß" in Bezug auf den Umfangswinkel, können wir den Mittelpunktswinkel-Satz in den in (Kuypers) vereinbarten Zeichen auch so formulieren:

(Mittelpunktswinkel-Satz)
Das Maß eines Umfangswinkels ist halb so groß wie das Maß eines Mittelpunktswinkels über demselben Bogen.

Eine Umformulierung dieser Aussage analog zu **V**. und die dazu gehörige semiotische Beweisstrategie wird aber hier interessanterweise eine andere Argumentationsfolge liefern als die Schritte 1. - 11. von **V**. Der Beweis mit algebraischen Zeichen bleibt aber leider fast unverändert. Im Text 2.3 braucht man nur eine Zeile hinzuzufügen: (6) $\alpha = \beta / 2$.
Auch hier sieht man, daß die semiotische Betrachtungsweise dazu führt, den vorliegenden Wissensbereich besser zu untersuchen und dabei möglicherweise neue Zusammenhäge zu erkennen.

Ich möchte mich sehr herzlich bei Elisabeth Walther für zahlreiche Gespräche und den Vorschlag, die Probleme des Mathematikunterrichtes semiotisch zu untersuchen, bedanken. Dankend möchte ich feststellen, daß die Freunde im Semiotik-Kolloquium der Universität Stuttgart durch ihre interessanten, konstruktiven Diskussionen mir sehr wichtige Impulse für neue Gedanken gegeben haben, die zu einer erheblichen Erweiterung und Verbesserung dieser Arbeit verglichen mit der ersten Version geführt haben. Um den Praxisbezug zu dieser Arbeit herzustellen, waren Gespräche mit FreundInnen sehr hilfreich, die im Bereich des Mathematikunterrichtes an der Schule tätig sind. Insbesondere hat mir Helga Böhrer (Berlin) - wiederholt und unermüdlich - durch ihre kritischen Bemerkungen und ihre Praxiserfahrung wertvolle Anregungen gegeben. Für diese Unterstützung möchte ich mich bei ihr herzlich bedanken. Es ist beabsichtigt, die hier begonnene Arbeit im Rahmen des Stuttgarter Semiotik-Kolloqims fortzusetzen.

Literatur:

Beck, Christian / Maier, Hermann: „Mathematik als Textwissenschaft", in: *Journal für Mathematikdidaktik* 15(94)1/2, 35-78.

Bense, Max: *Axiomatik und Semiotik in Mathematik und Naturerkenntnis.* Agis, Baden-Baden 1981.

Gallin, P. / Ruf, U.: „Sprache und Mathematik in der Schule", in: *Journal für Mathematikdidaktik* 14(93)1, 3-33.

Godino, Juan D./ Batanero, Carmen : „Institutional and Personal Meaning of Mathematical Objects", in: *Journal für Mathematikdidaktik* 17 (96)2,99-121.

Kuypers, W. (Hrsg) : *Mathematik für Gymnasien.* Sekundarstufe I Band 3, Schwann, Düsseldorf 1977.

Meserve, Bruce E.: „Geometry as a Gateway to Mathematics Devolopments in Mathematical Education" in: *Proc. of the Second Int. Cong. on Math. Education*, Cambridge University Press, 1973, 241- 253.

Peirce, Charles S.: *Zur semiotischen Grundlegung von Logik und Mathematik* Text 52, edition rot, Stuttgart 1976.

Schacht, D. A.: „Verstaubter Mathe-Unterricht", in: *Frankfurter Rundschau* (12.12.1996).

Schmid, S; Schweizer, W. (Hrsg): *LS Mathematik, Geometrie Eins,* Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1993.

Steinbring, H. : „Symbole, Referenzkontexte und Konstruktion mathematischer Bedeutung am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht", in: *Journal f. Mathematikdidaktik* 15(94)3/4, 227-310.

Thom, René: „Vom Icon zum Symbol", in: *Semiosis* 10, 3. Jg, H. 2, 1978, 5-23.
Thom, René: „L'espace et les signes", in: *Semiotica* 29, H. 3/4, 1980, 193-208.
Thom, René: „ Modern mathematics: does it exist? Developments in Mathematical Education". in: *Proc. of the Second Int. Cong. on Math. Education,* Cambridge University Press 1973, 194-209.
Thom, René: „"Moderne" Mathematik: Ein erzieherischer und philosophischer Irrtum?" in: *Mathematiker über die Mathematik*, Springer, Berlin 1974, 371-399.
Walther, Elisabeth: *Allgemeine Zeichelehre.* DVA, Stuttgart 1974, ^{2}1979.
Wittmann, E.C. „Mathematik als "design science", in: *Journal f. Mathematikdidaktik* 13(92)1, 55-70.

SEMIOSIS 83/84

Internationale Zeitschrift für
Semiotik und Ästhetik
21. Jahrgang, Heft 3/4, 1996

Inhalt