Hariss Kidwaii

DIE BASISTHEORIE DER SEMIOTIK UND DIE KLEINE 'MATRIX'

Elisabeth Walther zum 75. Geburtstag gewidmet

Die Entwicklung der Grundideen von Ch. S. Peirce zu einer Theorie der modernen Semiotik ist ein wichtiger Beitrag der 'Stuttgarter Schule', an dem Max Bense und Eisabeth Walther großen Anteil haben. Die in Stuttgart entwickelte Theorie wurde von Max Bense „Basistheorie der Peirceschen Semiotik" genannt. Eine wesentliche Rolle bei dieser Basistheorie spielt die sogenannte 'kleine Matrix' die Anlaß zur Bewunderung, aber auch zu Kontroversen gewesen ist (Walther, E., in: Semiosis, H. 3/4, 1991). Der Versuch, die triadische Zeichenrelation von Peirce mit einer 3 x 3-Matrix in Verbindung zu bringen und die Elemente der Zeichenrelation mit Hilfe des Matrixschemas numerisch zu kennzeichnen, ist ohne Zweifel ein interessanter und originärer Schritt von Max Bense und Elisabeth Walther gewesen. Das Denken in und Arbeiten mit Matrizen haben eine lange Tradition in der Mathematik, die in vielen Bereichen der Technik und Naturwissenschaften immer wieder bahnbrechend gewirkt hat. Man darf hier erwähnen, daß das Denken in Matrizen aus dem alten China herstammt, wo zum erstenmal - beim Lagern von verschiedenen Getreidesorten in Silos - lineare Gleichungssysteme indirekt mit Hilfe von Matrizen gelöst wurden. Dieses Verfahren ist heute als Gaußscher Algorithmus bekannt und läßt sich mit Hilfe der Matrizenrechnung durchführen.

Die Peirceschen Kategorien und Subzeichen, in numerischer Schreibweise in der Form der 'kleinen Matrix' geschrieben, ermöglichen es, die zehn Zeichenklassen jeweils als 3-Tupel von Zahlenpaaren darzustellen: 3.1 2.1 1.1 steht z. B. für die Zeichenklasse: rhematisch-iconische-Qualizeichen. Die Schreibweise 3.1 2.1 1.1 liefert offensichtlich klare Informationen über die jeweiligen Stufen der an dem Zeichen beteiligten Subzeichen, was bei der umgangssprachlichen Darstellung nicht der Fall ist.

Die Zahlenpaare 3.1 2.1 1.1 - genauso die anderen Zeichenklassen - zeigen aber, daß hier in 2 Schritten vorgegangen wird: zuerst werden mit Hilfe einer 2-stelligen Relation - unter Beachtung der Wohlordnungsregel - die Zahlenpaare gebildet, dann in einer bestimmten Reihenfolge geschrieben - als 3-Tupel - als Element einer 3-stelligen (Zeichen-) Relation interpretiert. Alle 10 3-Tupel von Zahlenpaaren zusammengenommen repräsentieren die triadische Zeichenrelation vollständig.

Durch die Dualisierung geht man noch einen Schritt weiter und gewinnt aus den numerischen Bezeichnungen der Zeichenklassen die jeweiligen Bezeichnungen für die Realitätsthematiken. Man könnte diese Darstellungsweise eine Stufe expliziter machen und nicht nur die Form einer 3 x 3-Matrix verwenden, sondern diese Matrizen selbst ins Spiel bringen, was dann auch mehr Information über den Aufbau einzelner Zeichenklassen und deren 'Abhängigkeit' voneinander liefert.

K sei eine Menge mit 2 Elementen '0' und '1', d. h.: K = {0, 1}. Wir nennen sie 'Null' und 'Eins'. Sie sind den gleichnamigen Zahlen ähnlich, aber hier mit ihnen nicht zu verwechseln. Für K definieren wir eine Addition '+' und Multiplikation '·' wie folgt:

$$0 + 0 = 0;\ 0 + 1 = 1;\ 1 + 0 = 1;\ 1 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$0 \cdot 0 = 0;\ 0 \cdot 1 = 0;\ 1 \cdot 0 = 0;\ 1 \cdot 1 = 1 \quad (2)$$

Die Eigenschaft 1 + 1 = 0 ist etwas auffallend, aber zulässig. Aufgrund dieser Eigenschaft gilt auch, daß das inverse Element von 1 bez. Addition - bezeichnen wir es mit -1 - ebenfalls 1 ist. Das heißt, es gelten:

$$-1 = 1 \quad -0 = 0 \quad (3)$$

K zusammen mit '+' und '·' bilden bekanntlich einen Körper im Sinne der Algebra (Fischer, G.: Lineare Algebra, 1978, S. 36).

Wir betrachten nun die Menge aller 3 x 3-Matrizen, deren Elemente jeweils 0 oder 1 sind - d. h. aus Elementen von K bestehen. Diese Menge wird mit M (3 x 3, K) bezeichnet.

Es gibt zunächst einmal 3 Matrizen dieser Art, d. h. 3 Elemente von M (3 x 3, K), die auffallen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ferner gibt es 9 Matrizen:

$$E_1{}^1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_1{}^2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_1{}^3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2{}^1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2{}^2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2{}^3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3{}^1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3{}^2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3{}^3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

die eine besondere Bedeutung haben.

Es ist leicht zu erkennen, daß die Matrix E_i^j ; i, j ε $\{1, 2, 3\}$ an der Schnittstelle der i-ten Zeile und der j-ten Spalte 1 stehen hat, sonst überall 0.

Den 9 Subzeichen:

Quali-, Sin-, Legi-,
Icon-, Index-, Symbol-,
Rhema-, Dicent-, Argument-Subzeichen

ordnen wir der Reihenfolge nach folgende Matrizen zu:

$E_1{}^1$, $E_1{}^2$, $E_1{}^3$,
$E_2{}^1$, $E_2{}^2$, $E_2{}^3$,
$E_3{}^1$, $E_3{}^2$, $E_3{}^3$.

Wir definieren auch die Addition von zwei Matrizen: Die Summe von 2 Matrizen ist die Matrix, die durch die Addition von entsprechenden Elementen entsteht. Zum Beispiel:

$$E_1{}^1 + E_1{}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_1^2 + E_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Zeichenklassen von Peirce lassen sich nun mit Hilfe von E_i^j ; $i,j \in \{1, 2, 3\}$ mittels der Matrixaddition wie folgt konstruieren:
z. B.:

$$3.2\ 2.2\ 1.3 <--> E_3^2 + E_2^2 + E_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Dualisierung von 3.2 2.2 1.3 ergibt : 3.1 2.2 2.3 . Ihr entspricht die Matrix, die die

Transponierte von $E_3^2 + E_2^2 + E_1^3$ bzw. von $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist.

Da die Transponierte von E_i^j - bezeichnet durch ${}^t(E_i^j)$ - gleich E_j^i ist und für A, B aus M(3x3,K) :

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

gilt, folgt:

$${}^t(E_3^2 + E_2^2 + E_1^3) = E_2^3 + E_2^2 + E_3^1 = E_3^1 + E_2^2 + E_2^3 <--> 3.1\ \ 2.2\ \ 2.3$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es gelten also folgende Zuordnungen:

Zeichenklassen Realitätsthematiken Zeichenklassen Realitätsthematiken

$$3.1\ 2.2\ 1.2 \times 2.1\ 2.2\ 1.3 \quad <--> \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{trans} - \\ --> \\ \text{poniert} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z. B.:

$$\left(E_3^1 + E_2^2 + E_1^2\right) \quad \left(= E_2^1 + E_2^2 + E_1^3\right)$$

Das Dreieck von C. S. Peirce läßt sich durch Matrizen wie folgt darstellen (s.a. E. Walther, in: *Semiosis 63/64*, Heft 3/4, 1991):

I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_3^1 + E_2^1 + E_1^1$
3.1 2.1 1.1

V

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_3^1 + E_2^1 + E_1^3$
3.1 2.1 1.3

VIII

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_3^1 + E_2^3 + E_1^3$
3.1 2.3 1.3

X

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_3^3 + E_2^3 + E_1^3$
3.3 2.3 1.3

II

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_3^1 + E_2^1 + E_1^2$
3.1 2.1 1.2

VI

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_3^1 + E_2^2 + E_1^3$
3.1 2.2 1.3

IX

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_3^2 + E_2^3 + E_1^3$
3.2 2.3 1.3

III

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_3^1 + E_2^2 + E_1^3$
3.1 2.2 1.3

VII

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_3^2 + E_2^2 + E_1^3$
3.2 2.2 1.3

IV

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_3^2 + E_2^2 + E_1^2$
3.2 2.2 1.2

Durch die Zeichenklassen-Matrizen - später im Text mit I, II,.....X wie oben bezeichnet - erkennt man klarer, wie die einzelnen Zeichenklassen aus den Subzeichen aufgebaut sind. Jede Matrix aus M(3x3,K) - deshalb auch jede Zeichenklassen-Matrix - läßt sich nur auf eine Weise durch die Subzeichen-Matrizen E_i^j mittels der Matrixaddition aufbauen. Damit ist die Information über den gesamten Raum M(3x3,K) eigentlich in der Menge von Matrizen E_i^j enthalten. Die Matrizen E_i^j werden deshalb (in der linearen Algebra) eine Basis des (Vektor-) Raum sM(3x3,K) genannt. Die Betrachtung der Zeichenklassen als Elemente eines Vektorraumes - nämlich M(3x3,K) - führt also zum Ergebnis, daß die Subzeichen (-Matrizen) als Basis die Zeichenklassen (-Matrizen) mittragen. Beim Aufbau der Peirceschen Semiotik hat die 'Stuttgarter Schule' diese Subzeichen als Grundbausteine verwendet und den Begriff Basistheorie der Semiotik geprägt. Man könnte sagen, daß das Wort 'Basis' in diesem Zusammenhang angesichts der Vektorraumstruktur der Zeichenklassen durchaus auch inhaltlich eine Relevanz besitzt.

Obwohl die numerische Schreibweise von Max Bense und Elisabeth Walther die Zusammenhänge sehr präzise darstellt, öffnet die hier vorgestellte Matrizendarstellung der Zeichenklassen möglicherweise den Blick für andere Zusammenhänge, insbesondere die Beziehungen der Zeichenklassen untereinander, die einfach durch die Matrixeigenschaften gegeben sind. So wie die Additionen von E_i^j zum Aufbau von Zeichenklassen-Matrizen führen, kann eine Subtraktion von E_i^j - was aufgrund von (3) gleich einer Addition ist - von Zeichenklassen-Matrizen diese zu Trichotomie-Matrizen 'degradieren'! Zum Beispiel:

$$\underset{\text{(VI}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + E_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1+1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: A_1$$

$$A_1 + E_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & (0+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{III}.$$

Folglich gilt:

$$\text{VI} + E_1^3 + E_1^2 = \text{III}.$$

Wenn wir die Abbildungen T_i^j von M(3x3,K) in M(3x3,K) wie folgt definieren:

$$T_i^j(A) = A + E_i^j \; ; \; A \; \varepsilon \; M(3x3,K) \; ; \; i, j \; \varepsilon \; \{1, 2, 3\},$$

können wir obige Schritte wie folgt beschreiben:

$$T_1^3(T_1^2(\text{VI})) = \text{III}.$$

Man kann auch sagen : die Zeichenklasse VI läßt sich mittels der Abbildungen T_1^2 , T_1^3 in die Zeichenklasse III überführen. Dies zeigt : III und VI sind in einem gewissen Sinne voneinander 'abhängig'. Ein Bild der 'Klassenabhängigkeiten' liefert folgendes Schema:

$T_1^2 (T_1^1 (I)) = II$, $T_1^3 (T_1^1 (I) = V$

$T_2^2 (T_2^1 (II) = III$ $T_2^2 (T_2^1 (V) = VI$ $T_2^3 (T_2^1 (V) = VIII$

$T_3^2 (T_3^1 (III) = IV$ $T_3^2 (T_3^1 (VI) = VII$ $T_3^2 (T_3^1 (VIII) = IX$

$T_3^3 (T_3^2 (IX) = X$.

Die Realitätsthematiken - als Trichotomische Triaden - (Walther, E.; Semiosis, Heft 3/4,1991) lassen sich ebenfalls aus geeigneten E_i^j mittels derMatrixaddition aufbauen und als Matrizen des Vektorraumes M(3x3,K) darstellen. Auch die Problematik der 66 Zeichenklassen von C. S. Peirce könnte im Rahmen des Vektorraumes M(3x3,K) angegangen werden.

Die 'Kleine Matrix' - und die von ihr abgeleitete numerische Schreibweise hat - meiner Ansicht nach - klare Darstellungen sehr komplizierter Zusammenhänge aus der Peirceschen Semiotik ermöglicht und damit einen wichtigen Beitrag zur Fundierung der Semiotik geleistet. Die von mir hier eingeführte Darstellungsweise der triadischen Zeichenrelation ist als eine Interpretation der 'Kleinen Matrix' anzusehen und als solche eventuell als ihre Erläuterung.

Inhalt